

## Epreuve de Mathématiques II

Durée : 4 H Nbre de pages : 4

Barème : Part.I : 8 points , Part.II : 3 points , Part. III : 3 points, Part. IV : 6 points.

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

### Notations :

Dans tout le problème,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des matrices à  $n$  lignes et à  $n$  colonnes, à coefficients réels et  $I_n$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Le coefficient de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne d'une matrice  $A$  est noté  $A_{ij}$ . On note  ${}^tA$  la matrice transposée de  $A$ , la matrice définie par  ${}^tA_{ij} = A_{ji}$  pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- La matrice  $A$  est dite symétrique, respectivement antisymétrique, si  ${}^tA = A$ , respectivement  ${}^tA = -A$ . On désigne par  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices antisymétriques.
- La matrice  $A$  est dite symétrique positive si  $A$  est symétrique et ses valeurs propres sont positives ou nulles. On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques positives.
- La matrice  $A$  est dite orthogonale si elle vérifie  ${}^tAA = I_n$ . On désigne par  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales.
- La trace de la matrice  $A$  est définie par  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$ . On admet l'égalité

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) \text{ pour toutes matrices } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Un vecteur  $X \in \mathbb{R}^n$  sera considéré comme un vecteur colonne  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  ${}^tX$  désignera le

vecteur ligne obtenu par transposition. On munit  $\mathbb{R}^n$  du produit scalaire usuel défini par

$$(X|Y) = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ pour tous vecteurs } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

et de la norme  $\|X\| = \sqrt{(X|X)}$ .

L'objectif de ce problème est de montrer la décomposition en valeurs singulières d'une matrice carrée à l'aide d'une inégalité sur la trace, et d'appliquer cette décomposition afin de trouver une matrice pseudo-inverse. La partie I est composée des 3 sous parties I.1, I.2 et I.3 qui sont indépendantes. Les résultats de la partie I peuvent être utilisés dans les autres parties.

## I. Préliminaires

### I.1. Matrices symétriques et anti-symétriques

I.1.1. Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

I.1.2. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , en posant

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB) \text{ pour toute matrice } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

I.1.3. Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$ , où  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$  désigne le sous-espace orthogonal à  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### I.2. Groupe orthogonal

I.2.1. Montrer que  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est un sous-groupe du groupe  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

I.2.2. Soit  $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Justifier que tout coefficient  $U_{ij}$  de  $U$  vérifie  $|U_{ij}| \leq 1$ .

I.2.3. Montrer que  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est une partie compacte de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

I.2.4. Soit  $X$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  de norme 1 et  $M_X$  la matrice définie par  $M_X = X^tX \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

I.2.4.a Montrer que  $\text{Tr}(M_X) = 1$ . Quel est le rang de la matrice  $M_X$ ?

I.2.4.b Montrer que  $M_X$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et déterminer une matrice diagonale  $D$  semblable à  $M_X$ .

I.2.4.c Montrer que la matrice  $U_X = I_n - 2M_X$  est orthogonale et que  $U_X$  représente une symétrie orthogonale.

### I.3. Exponentielle d'une matrice.

On rappelle que l'exponentielle de matrice est l'application  $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par la formule :

$$\exp(M) = e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M^k}{k!},$$

et vérifiant, pour toutes matrices  $A$  et  $B$  telles que  $AB = BA$ ,  $e^{(A+B)} = e^A e^B$ .

I.3.1. Montrer, soigneusement, que  ${}^t(e^M) = e^{tM}$  et que  $e^{PMP^{-1}} = Pe^MP^{-1}$  pour toute matrice  $M$  et toute matrice inversible  $P$ .

I.3.2. Soit  $A$  une matrice diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $e^A$  est diagonalisable, et qu'il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $A = Q(e^A)$ . (On pourra utiliser un polynôme interpolateur de Lagrange).

I.3.3. Soit  $S$  une matrice symétrique. Montrer que  $e^S$  est une matrice symétrique positive.

I.3.4. Soit  $A$  une matrice antisymétrique. Montrer que  $e^A$  est une matrice orthogonale.

## II. Une Caractérisation des matrices symétriques positives

On se propose de démontrer dans cette partie le résultat suivant :

Une matrice  $S$  est symétrique positive, si et seulement si,  $\text{Tr}(US) \leq \text{Tr}(S)$  pour tout  $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

II.1. Soit  $S$  une matrice symétrique positive.

II.1.1. Montrer que si  $D$  est une matrice diagonale telle que  $D_{ii} \geq 0$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , alors  $\text{Tr}(UD) \leq \text{Tr}(D)$ , pour tout  $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . (On pourra utiliser la question I.2.2.)

II.1.2. En déduire que  $\text{Tr}(US) \leq \text{Tr}(S)$ , pour tout  $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

II.2. Inversement, on se donne une matrice  $S$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $\text{Tr}(US) \leq \text{Tr}(S)$ , pour tout  $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

On fixe une matrice antisymétrique  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \text{Tr}(e^{xA}S), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

II.2.1. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $f'(x) = \text{Tr}(Ae^{xA}S)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

II.2.2. Justifier que  $f(x) \leq f(0)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . En déduire que :  $\langle S, A \rangle = \text{Tr}(AS) = 0$ .

II.2.3. Conclure que  $S$  est une matrice symétrique.

II.2.4. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $S$  et  $X$  un vecteur propre de norme 1 associé à  $\lambda$ .

Montrer que :

$$\text{Tr}(SU_X) = \text{Tr}(S) - 2\lambda,$$

où  $U_X$  est la matrice orthogonale définie dans la question I.2.4.c.

II.2.5. En déduire que  $S$  est une matrice symétrique positive.

## III. Décomposition en valeurs singulières

Le but de cette partie est de démontrer que toute matrice  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , s'écrit  $A = UDV$ , où  $U$  et  $V$  sont des matrices orthogonales et  $D$  est une matrice diagonale dont les coefficients sont positives ou nulles.

On fixe une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

III.1. En utilisant la question I.2.3., justifier l'existence d'une matrice orthogonale  $U_0$  vérifiant :

$$\text{Tr}(U_0A) = \max \{ \text{Tr}(UA) : U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \}.$$

III.2. En utilisant le résultat de la partie II., montrer que la matrice  $S = U_0A$  est une matrice symétrique positive.

III.3. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale  $O$  et une matrice symétrique positive  $S$  telles que  $A = OS$ .

III.4. Prouver l'existence d'une matrice diagonale  $D$  à coefficients positifs et deux matrices orthogonales  $U$  et  $V$  vérifiant  $A = UDV$ .

Les coefficients diagonaux  $D_{ii}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de la matrice  $D$  sont appelés valeurs singulières de la matrice  $A$  et la décomposition ainsi obtenue est appelée **décomposition de  $A$  en valeurs singulières**.

III.5. **Exemple :** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $\max \{ \text{Tr}(UA) ; U \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \} = 2$ .

En déduire une décomposition en valeurs singulières de la matrice  $A$ .

## IV. Applications :

On donne ici deux applications (**indépendantes**) de la décomposition en valeurs singulières

### Première application : Existence d'une pseudo-inverse

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Une matrice  $A^* \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est appelée une **pseudo-inverse** de la matrice  $A$  si elle vérifie :

- $AA^*$  et  $A^*A$  sont deux matrices symétriques.
- $AA^*A = A$  et  $A^*AA^* = A^*$ .

IV.1.1. Montrer que si  $A$  est une matrice inversible, alors  $A^{-1}$  est une matrice pseudo-inverse de  $A$ .

IV.1.2. Soit  $D$  la matrice définie par blocs  $D = \begin{pmatrix} 0_{n-k} & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , où  $D_1$  est une matrice inversible de  $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ ,  $k \leq n$ . Déterminer une pseudo-inverse de  $D$ .

IV.1.3. Déterminer une matrice pseudo-inverse d'une matrice  $A$  à partir de sa décomposition en valeurs singulières.

IV.1.4. On se donne une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et un vecteur  $b \in \mathbb{R}^n$ .

IV.1.4.a. Montrer qu'il existe un vecteur  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ , vérifiant :

$$\|AX_0 - b\| = \inf \{ \|AX - b\| ; X \in \mathbb{R}^n \},$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$ .

IV.1.4.b. Soit  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\varphi(X) = \|AX - b\|^2 = (AX - b | AX - b).$$

Montrer que  $\varphi$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^n$  et que sa différentielle en  $X \in \mathbb{R}^n$ , notée  $d\varphi(X)$ , est donnée par :

$$d\varphi(X) \cdot h = 2({}^tAAX - {}^tAb|h), \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}^n.$$

IV.1.4.c. En déduire que :

$$\inf \{ \|AX - b\| : X \in \mathbb{R}^n \} = \|AA^*b - b\|.$$

### Deuxième application : Sous groupe compact maximal

Soit  $G$  un sous-groupe compact de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  qui contient  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

IV.2.1. Soit  $D$  une matrice diagonale. Montrer que la suite des matrices  $(D^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , si et seulement si,  $|D_{ii}| \leq 1$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

IV.2.2. En déduire que si  $D$  est une matrice diagonale appartenant à  $G$ , alors  $|D_{ii}| = 1$ , pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

IV.2.3. Soit  $A \in G$ . On écrit  $A = UDV$  une décomposition en valeurs singulières de  $A$ . Montrer que la matrice  $D \in G$  et en déduire que  $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

( $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est alors un sous-groupe compact maximal de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ ).

**Fin de l'énoncé**