Premier problème de révision

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

☞ On rappelle que :

• Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ et que cette série est absolument convergente sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $AB = BA$ alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

• Si $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors $e^{\Delta} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$.

• En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $e^{\lambda I_n} = e^{\lambda} I_n$.

☞ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une puissance universelle si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M^k = A$.

Partie I

1. On considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel qu'il existe une matrice $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $B = P^{-1}AP$ et on pose $P = P_1 + iP_2$ et soit f l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; t \mapsto f(t) = \det(P_1 + tP_2)$.
   (a) Démontrer que f est une fonction polynomiale non nulle.
   (b) En déduire qu'il existe un nombre réel t_0 tel que la matrice $Q = P_1 + t_0 P_2$ est inversible.
   (c) Justifier que $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $B = Q^{-1}AQ$.
   (d) Enoncer le résultat démontré dans cette question.
2. Soit $A = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_s)$ une matrice de $\mathcal{M}_n(R)$ diagonale par blocs tel que $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{R})$ avec $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N}^*$ et $\sum_{k=1}^{s} n_k = n$.
   (a) Soit $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq s}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par blocs tel que $M_{k,k} \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{R})$ pour tout $k \in [\![1, s]\!]$ et $M_{k,k}$ est diagonale. Démontrer que $AM = MA$ si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1, s]\!]^2, i \neq j \Rightarrow M_{i,j} = 0$.
   (b) En déduire que $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel dont on précisera les éléments et la dimension.
   (c) Étudier le cas particulier $s = n$.

Partie II

1. On suppose que $n = 1$. Quelles sont les puissance universelles de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$?
2. On retourne au cas général n est un entier naturel quelconque.
   (a) Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si A et B sont semblables alors A est une puissance universelle si et seulement si B est une puissance universelle.
   (b) Démontrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice e^A est une puissance universelle.
   (c) Soit $A = \lambda I_n$. A quelle condition sur λ la matrice A est une puissance universelle.
3. Soit A une matrice de projecteur, c'est-à-dire $A^2 = A$. Est ce que A est une puissance universelle.
4. Soit A une matrice de symétrie, c'est-à-dire $A^2 = I_n$. A quelle conditions A est une puissance universelle ?

Partie III

Pour tout nombre réel θ, on note $A_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{A_\theta} = R_\theta$.
2. En déduire que :
   (a) $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \quad R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$.
   (b) $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad (R_\theta)^k = R_{k\theta}$.
   (c) Montrer que pour $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice R_θ est une puissances universelle.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.
   (a) Justifier que le polynôme caractéristique de A est de la forme
   $$\chi_A = (X - \omega)(X + \omega),$$
   où ω est un nombre complexe non réel. On pose alors :
   $$\rho = |\omega| \quad \text{et} \quad \theta = \arg(\omega).$$
   (b) En déduire que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et que, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on a :
   $$A \sim \Delta = \mathrm{diag}(\omega, \overline{\omega}) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \overline{\omega} \end{pmatrix}.$$
   (c) Soit $a = \mathfrak{Re}(\omega)$ et $a = \mathfrak{Im}(\omega)$ et $B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Démontrer que $B \sim \Delta$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   (d) En déduire que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (e) Démontrer que $B = \rho R_\theta$ et que toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sans valeur propre réelle est toujours semblable à une matrice de la forme $B = \rho R_\theta$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   (f) En déduire que A est une puissance universelle.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que A est trigonalisable et non diagonalisable.
   (a) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{V} = \mathrm{Vect}(I_2, N)$.
   (b) Démontrer que $\forall M \in \mathscr{V}, \quad e^M \in \mathscr{V}$.
   (c) A quelle condition sur λ, la matrice A est elle une puissance universelle ?
5. Soit A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de valeurs propres λ et μ.
   A quelle condition sur λ et μ la matrice A est elle une puissance universelle ?

Partie IV

1. Soit A une matrice diagonale de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes.
   (a) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AB = BA$. Démontrer que B est une matrice diagonale.
   (b) Montrer que si $A = M^k$ avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}^*$ alors M est une matrice diagonale.
   (c) A quelle condition sur les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ la matrice A est elle une puissance universelle ?
2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que A est diagonalisable avec n valeurs propres distinctes deux à deux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. A quelle condition sur les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ la matrice A est elle une puissance universelle ?