

Problème

Ce sujet a pour objet l'étude du comportement asymptotique des solutions de certaines équations différentielles linéaires du deuxième ordre.

Les deux premières parties, indépendantes entre elles, sont consacrées à des exemples. La troisième partie a pour but d'établir quelques résultats utiles pour la quatrième partie.

Toutes les fonctions intervenant dans ce problème sont à valeurs réelles.

– Partie I –

On considère les intégrales impropres suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

- 1) Justifier la convergence des intégrales I_1 et I_2 et les calculer.
- 2) Justifier la convergence de I_3 et la calculer en introduisant la fonction $\varphi : u \mapsto \sin u$.
- 3) On considère la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

- a) Démontrer que f est définie sur \mathbb{R} .
- b) Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et donner $f'(x)$ et $f''(x)$ à l'aide d'intégrales.
- c) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x f''(x) + f'(x) + x f(x) = 0.$$

- 4) On se donne une fonction q , définie et de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$ telle que

$$\forall x \in I, \quad q'(x) \leq 0$$

et on considère une fonction z de classe \mathcal{C}^2 sur I et solution sur I de l'équation différentielle

$$z''(x) + q(x)z(x) = 0.$$

- a) On note $u : x \mapsto q(x)z^2(x) + (z'(x))^2$. Démontrer que la fonction u est décroissante sur I .
 - b) En déduire que s'il existe un réel $q_0 > 0$ tel que $\forall x \in I, \quad q(x) \geq q_0$,
alors z est bornée sur I .
- 5) Soit y une fonction définie et de classe \mathcal{C}^2 sur $I = [1, +\infty[$ vérifiant

$$\forall x \in I, \quad x y''(x) + y'(x) + x y(x) = 0$$

et z la fonction définie sur I par $z(x) = \sqrt{x} y(x)$. Déterminer une fonction q telle que

$$\forall x \in I, \quad z''(x) + q(x)z(x) = 0.$$

- 6) Démontrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in I, \quad |f(x)| \leq \frac{M}{\sqrt{x}}$
où f est la fonction définie en 3 de cette partie.

– Partie II –

Soit y une fonction définie et de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles. On considère alors la fonction z définie sur $]0, +\infty[$ par $z(t) = y\left(\frac{1}{t}\right)$.

7) Démontrer que y est une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$4x^4y''(x) - y(x) = 0 \quad (E_1)$$

si et seulement si z est une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$4tz''(t) + 8z'(t) - tz(t) = 0 \quad (E_2)$$

8) Démontrer qu'il existe une et une seule fonction u développable en série entière sur \mathbb{R} vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 4tu''(t) + 8u'(t) - tu(t) = 0 \quad \text{et} \quad u(0) = 1$$

On déterminera les coefficients de son développement en série entière, puis on l'exprimera à l'aide des fonctions usuelles.

9) Déterminer une solution y_1 de (E_1) sur $]0, +\infty[$ autre que la fonction nulle telle que $\frac{y(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. On vérifiera qu'elle ne s'annule en aucun point de $]0, +\infty[$.

10) Soit y_1 la solution de la question 9 et soit y une solution de (E_1) et soit

$$w : x \mapsto \begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y'(x) - y_1'(x)y(x)$$

a) Montrer que w est constante sur $]0, +\infty[$.

On note λ la valeur de w sur $]0, +\infty[$.

De ce fait, y satisfait l'équation différentielle (F_λ) d'ordre 1

$$y_1(x)y'(x) - y_1'(x)y(x) = \lambda \quad (F_\lambda)$$

b) Donner, sans aucun calcul, une solution non nulle de l'équation homogène associée.

c) Résoudre l'équation avec second membre sur \mathbb{R}_+^* . On pourra utiliser $\coth' = -\frac{1}{\text{sh}^2}$ (avec $\coth = \frac{\text{ch}}{\text{sh}}$).

11) Montrer sans aucun calcul que l'ensemble des solutions sur \mathbb{R}_+^* de (E_1) est la réunion des ensembles des solutions des équations (F_λ) lorsque λ parcourt \mathbb{R} .

– Partie III –

12) Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout couple (s, u) de nombres réels avec $s \geq u \geq 1$, on ait

$$|f(s) - f(u)| \leq \frac{C}{u}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = f(n^2)$.

a) Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente. On notera L sa limite (on ne demande pas de calculer L).

c) Démontrer que $f(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} L$.

13) Soit g une fonction définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ telle que $g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

a) Démontrer que g' est bornée sur $[0, +\infty[$.

On notera alors M un réel tel que $|g'(x)| \leq M$ pour tout $x \geq 0$.

b) Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 g'(tx) dt = 0.$$

c) En déduire que $\frac{g(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

14) Soit h une fonction définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$. On suppose que h' possède une limite finie L en $+\infty$. Démontrer que $\frac{h(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L$.

– Partie IV –

On se donne une fonction q définie et continue sur $[1, +\infty[$. On considère sur $[1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0 \quad (E)$$

Soit y une solution de E de classe \mathcal{C}^2 sur $[1, +\infty[$.

15) Vérifier que pour tout couple (s, u) de réels tels que $s \geq u \geq 1$, on a

$$y'(s) - y'(u) = - \int_u^s q(t)y(t) dt.$$

16) Déduire de la question 15 que pour tout réel $x \geq 1$,

$$\frac{y(x)}{x} = \frac{y(1)}{x} + \frac{x-1}{x}y'(1) - \frac{1}{x} \int_1^x \left(\int_1^s q(t)y(t) dt \right) ds.$$

On supposera désormais que la fonction $t \mapsto tq(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et en notant

$$r = \int_1^{+\infty} |tq(t)| dt, \quad \text{on supposera que } r < 1.$$

17) On fixe un réel $A > 1$.

a) Justifier l'existence du réel $M_A = \max_{x \in [1, A]} \left| \frac{y(x)}{x} \right|$.

b) Démontrer que pour tout $x \in [1, A]$,

$$\left| \frac{y(x)}{x} \right| \leq |y(1)| + |y'(1)| + \frac{M_A}{x} \int_1^x \left(\int_1^s |tq(t)| dt \right) ds.$$

c) En déduire que

$$M_A \leq \frac{|y(1)| + |y'(1)|}{1-r}.$$

18) Démontrer que la fonction $x \mapsto \frac{y(x)}{x}$ est bornée sur $[1, +\infty[$.

19) On suppose de plus que la fonction $t \mapsto t^2q(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

a) Montrer qu'il existe un réel $K > 0$ tel que pour tout couple (s, u) de réels vérifiant $s \geq u \geq 1$, on ait

$$|y'(s) - y'(u)| \leq \frac{K}{u}$$

et en déduire que $y'(x)$ possède une limite finie L lorsque x tend vers $+\infty$.

b) En déduire que $\frac{y(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L$.

20) Peut-on affirmer, sans utiliser les questions 10 et 11, que pour toute solution y de l'équation différentielle (E_1) de la deuxième partie, il existe une limite à $\frac{y(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier la réponse.