

Corrigé

– Partie I –

1)

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = [\arcsin(t)]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = [-\sqrt{1-t^2}]_0^1 = \boxed{1}$$

(ces intégrales convergent bien car les primitives des intégrandes ont des limites finies aux bornes de l'intervalle d'intégration)

2) Par le changement de variable $t = \sin u$, de classe \mathcal{C}^1 et bijectif de $[0, 1[$ vers $[0, \frac{\pi}{2}[$,

$$I_3 = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 u}{|\cos u|} \cos u du$$

au sens que l'intégrale I_3 converge si et seulement si l'intégrale au membre de droite converge.

De plus, $|\cos u| = \cos u$ pour tout $u \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Donc l'intégrale au membre de droite s'écrit $\int_0^{\pi/2} \sin^2 u du$ et ainsi converge car \sin^2 est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ainsi I_3 converge et

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2u}{2} du = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{\sin 2u}{4} \right]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

3) a) Posons $g : (x, t) \mapsto \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g(x, \cdot)$ est continue sur $[0, 1[$ et $g(x, t) = O_{t \rightarrow 1}(\frac{1}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}) = O_{t \rightarrow 1}(\frac{1}{(1-t)^{1/2}})$. Comme $\frac{1}{2} < 1$, $g(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0, 1[$ donc $\boxed{f \text{ est définie en } x}$.

b) Pour tout $t \in [0, 1[$, $g(\cdot, t)$ est de classe \mathcal{C}^2 .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot) : t \mapsto -\frac{t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et intégrable sur $[0, 1[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, \cdot) : t \mapsto -\frac{t^2 \cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0, 1[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, 1[$, $|g(x, t)| \leq \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$ et φ est continue et intégrable sur $[0, 1[$ car I_3 converge et $|\varphi| = \varphi$ (ou car $\varphi(t) = O_{t \rightarrow 1}(\frac{1}{(1-t)^{1/2}})$).

Ainsi $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}}$ et ses dérivées d'ordre 1 et 2 se calculent à l'aide de la règle de Leibniz : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \boxed{\int_0^1 \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt}$$

$$f''(x) = \boxed{\int_0^1 \frac{-t^2 \cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} xf''(x) + xf(x) &= x \int_0^1 \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}} \cos(xt) dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-t^2} x \cos(xt) dt \\ &= [\sin(xt)\sqrt{1-t^2}]_{t=0}^1 - \int_0^1 \sin(xt) \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{aligned}$$

sous réserve de convergence du crochet.

Tel est le cas car $\sin(xt)\sqrt{1-t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 1} \sin(x).0 = 0$.

Ainsi

$$\boxed{xf''(x) + xf(x) = -f'(x)}$$

4) a) u est dérivable car q, z, z' le sont, et

$$u' = q'z^2 + 2qzz' + 2z'z'' = q'z^2 + 2z'(qz + z'') = q'z^2 \leq 0$$

car $q' \leq 0$.

Donc $\boxed{u \text{ décroît sur l'intervalle } I}$.

b) Pour tout $x \in I$,

$$u(1) \geq u(x) \geq q_0 z^2(x)$$

donc

$$|z(x)| \leq \sqrt{\frac{u(1)}{q_0}}$$

et ainsi $\boxed{z \text{ est bornée.}}$

5) Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} z''(x) &= \sqrt{x}y''(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}y'(x) - \frac{1}{4x^{3/2}}y(x) \\ &= \sqrt{x}\left(-\frac{y'(x)}{x} - y(x)\right) + \frac{1}{\sqrt{x}}y'(x) - \frac{1}{4x^{3/2}}y(x) \\ &= -\sqrt{x}y(x)\left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) \\ &= -z(x)q(x) \end{aligned}$$

avec $\boxed{q : x \mapsto 1 + \frac{1}{4x^2}}$.

6) La fonction q est bien de classe \mathcal{C}^1 sur I , elle décroît et est minorée par $q_0 = 1 > 0$.

Posons $z : x \mapsto \sqrt{x}f(x)$.

D'après la question 4, $|z|$ est majorée par une constante $M > 0$ et ainsi

$$\boxed{\forall x \in I, |f(x)| = \frac{|z(x)|}{\sqrt{x}} \leq \frac{M}{\sqrt{x}}}$$

– Partie II –

- 7) La fonction z est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ si et seulement si y l'est car $t \mapsto 1/t$ est une involution de $]0, +\infty[$ de classe \mathcal{C}^∞ .

Supposant y de classe \mathcal{C}^2 ,

Pour tout $t > 0$,

$$z'(t) = \frac{-1}{t^2}y'(1/t)$$

$$z''(t) = \frac{2}{t^3}y'(1/t) + \frac{1}{t^4}y''(1/t)$$

$$\boxed{4tz''(t) + 8z'(t) - tz(t) = t(4x^4y''(x) - y(x))}$$

en posant $x = \frac{1}{t}$.

Comme t est non nul et $t \mapsto x$ bijective de $]0, +\infty[$ vers lui-même, y vérifie (E_1) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si z vérifie (E_2) sur $]0, +\infty[$.

- 8) analyse : soit u développable en série entière sur \mathbb{R} solution de (E_2) et valant 1 en 0.

Soient (a_n) les coefficients du développement de f en série entière.

Alors $a_0 = 1$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, comme u et u' peuvent se calculer en dérivant terme à terme sur $] -R, R[$ avec $R = +\infty$,

$$0 = \sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1)a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 8na_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (4n(n-1) + 8n)a_n t^{n-1} - \sum_{p=2}^{\infty} a_{p-2} t^{p-1}$$

car $4n(n-1)$ est nul pour $n = 1$.

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle sur \mathbb{R} ,

$$\boxed{a_1 = 0} \text{ et pour tout } n \geq 2, \boxed{4n(n+1)a_n = a_{n-2}}.$$

Ainsi par récurrence, pour tout naturel p , $\boxed{a_{2p+1} \text{ est nul}}$ et

$$a_{2p} = \frac{1}{4(2p)(2p+1)} \cdot \frac{1}{4(2p-2)(2p-1)} \cdots \frac{1}{4 \cdot 2 \cdot 3} a_0 = \boxed{\frac{1}{4^p(2p+1)!}}$$

Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad u(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2p}}{(2p+1)!} = \boxed{\begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{2}{t} \operatorname{sh} \frac{t}{2} & \text{si } t \neq 0 \end{cases}}$$

synthèse : la fonction u trouvée dans l'analyse est bien développable en série entière sur \mathbb{R} entier, et en remontant les calculs précédents, u est bien solution de l'équation (E_2) sur \mathbb{R} et vaut bien 1 en 0.

9) Posant $y_1 : x > 0 \mapsto u(1/x) = 2x \operatorname{sh} \frac{1}{2x}$, on obtient d'après la question 7 une solution de (E_1) .

Cette fonction ne s'annule jamais sur $]0, +\infty[$ car sh ne s'annule jamais sur $]0, +\infty[$.

10) a) w est dérivable et pour tout $x > 0$

$$w'(x) = (y_1 y'' + y_1' y' - y_1'' y - y_1' y')(x) = y_1(x) \frac{y(x)}{4x^4} - \frac{y_1(x)}{4x^4} y(x) = 0$$

Ainsi w est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

b) y_1 est solution évidente de l'équation homogène (F_0) .

c) Comme y_1 ne s'annule jamais on peut poser en toute généralité $y = y_1 c$ où $c = y/y_1$ est une fonction de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 si et seulement si y l'est.

y vérifie (F_λ) si et seulement si c vérifie

$$\forall x > 0 \quad y_1^2(x) c'(x) = \lambda$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} c(x) &= cte + \int^x \frac{\lambda}{y_1^2(s)} ds \\ &= cte + \int^x \frac{\lambda}{4s^2 \operatorname{sh}^2(\frac{1}{2s})} ds \\ &= cte + \int^x \frac{\lambda}{4s^2 \operatorname{sh}^2(\frac{1}{2s})} ds \\ &= cte + \int^{\frac{1}{2x}} \frac{-\lambda}{2 \operatorname{sh}^2 t} dt \text{ par le changement de variable } t = \frac{1}{2s}, \quad dt = \frac{-ds}{2s^2} \\ &= \mu + \lambda \operatorname{coth} \frac{1}{2x} \text{ avec } \mu \text{ constante réelle arbitraire} \end{aligned}$$

Ainsi la solution générale de (F_λ) est $x \mapsto 2x(\mu \operatorname{sh} \frac{1}{2x} + \lambda \operatorname{ch} \frac{1}{2x})$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

(remarque : on peut enlever le 2 en facteur)

11) Notons S l'ensemble des solutions de (E_1) et S' la réunion des ensembles de solutions des équations (F_λ) lorsque λ parcourt \mathbb{R} .

Ce qui précède montre que $S \subset S'$.

Or S' est de dimension deux car engendré par $x \mapsto 2x \operatorname{sh} \frac{1}{2x}$ et $x \mapsto 2x \operatorname{ch} \frac{1}{2x}$ qui sont linéairement indépendantes car leur wronskien est $1 \neq 0$ (car la deuxième fonction vérifie (F_1)).

De plus, par le théorème de Cauchy linéaire, S est de dimension deux comme ensemble des solutions d'une équation scalaire homogène du second ordre résolue en y'' (car E_1 s'écrit $y''(x) = \frac{y(x)}{4x^4}$) à coefficients continus.

Donc $S = S'$.

– Partie III –

- 12) a) Soit $n \geq 1$, en appliquant l'hypothèse sur f à $s = (n+1)^2$ et $u = n^2$, on obtient que

$$|u_{n+1} - u_n| = |f((n+1)^2) - f(n^2)| \leq \frac{C}{n^2}$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann) donc, par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} |u_{n+1} - u_n|$.

La série $\sum_{n \geq 1} u_{n+1} - u_n$ est donc absolument convergente donc convergente

- b) Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - u_k$ par télescopage. D'après la question précédente, la série $\sum_{k \geq 1} u_{k+1} - u_k$ converge donc $(u_n)_{n \geq 1}$ converge et

$$L = \lim(u_n) = u_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k+1} - u_k$$

- c) On veut montrer que $f(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} L$. C'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, on veut construire $\eta > 0$ tel que pour tout **réel** s , $s \geq \eta \Rightarrow |f(s) - L| \leq \varepsilon$.

Commençons par remarquer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C}{n} = 0$ donc, il existe n_1 tel que $n \geq n_1 \Rightarrow \frac{C}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

De même, comme $\lim(u_n) = L$, il existe n_2 tel que $n \geq n_2 \Rightarrow |u_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons N un entier tel que $N^2 \geq n_1$ et $N \geq n_2$. Pour $s \geq N^2$,

$$|f(s) - L| \leq |f(s) - f(N^2)| + |f(N^2) - L|$$

or $|f(s) - f(N^2)| \leq \frac{C}{n^2} \leq \frac{C}{n_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $|f(N^2) - L| = |u_N - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ car $N \geq n_2$.

Finalement pour $s \geq N^2$, $|f(s) - L| \leq \varepsilon$ ce qui prouve que $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = L$.

- 13) a) Fixons $\varepsilon = 42$. Par définition du fait que $g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour $x \geq A$, $|g'(x)| \leq \varepsilon$. De plus, comme g est de classe \mathcal{C}^1 , la fonction g' est continue sur $[0, +\infty[$ donc sur le **segment** $[0, A]$ qui est compact, elle est bornée. Il existe donc ε' tel que pour tout $x \in [0, A]$, $|g'(x)| \leq \varepsilon'$. En prenant $M = \max(\varepsilon, \varepsilon')$, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $|g'(x)| \leq M$ ce qui montre que g' est bornée sur $[0, +\infty[$.

- b) On applique le théorème de convergence dominée (version continue).

i) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $t \mapsto g'(xt)$ est continue (par morceaux) sur $]0, 1]$.

ii) Pour tout $t \in]0, 1]$, $g'(xt) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ car $g'(X) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$ et la fonction constante égale à 0 est continue (par morceaux) sur $]0, 1]$

iii) **Hypothèse de domination** : Pour tout $x \in [0, +\infty[$, pour tout $t \in]0, 1]$, $|g'(xt)| \leq M$ et la fonction constante égale à M est intégrable sur $]0, 1]$.

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 g'(tx) dt = \int_0^1 0 dt = 0.$$

Remarque :

si on intègre sur $[0, 1]$ au lieu de $]0, 1]$ la fonction limite est $t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0 \\ g'(0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$

c) Pour $x > 0$,

$$\int_0^1 g'(tx) dt = \left[\frac{g(xt)}{x} \right]_0^1 = \frac{g(x)}{x} - \frac{g(0)}{x}$$

On en déduit que

$$\frac{g(x)}{x} = \int_0^1 g'(tx) dt + \frac{g(0)}{x}$$

et donc $\boxed{\frac{g(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$

14) On pose $g : x \mapsto h(x) - Lx$. Cette fonction est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g'(x) = h'(x) - L$ si bien que $g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L - L = 0$. En appliquant les résultats de la question précédente, $\frac{g(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit que $\frac{h(x)}{x} = \frac{g(x) + Lx}{x} = \frac{g(x)}{x} + L \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L$.

– Partie IV –

15) Soit (s, u) un couple de réels tels que $s \geq u \geq 1$,

$$y'(s) - y'(u) = \int_u^s y''(t) dt = - \int_u^s q(t)y(t) dt.$$

16) On en déduit que pour $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} y(x) - y(1) &= \int_1^x y'(s) ds \\ &= \int_1^x \left(y'(1) - \int_u^s q(t)y(t) dt \right) ds \\ &= y'(1)(x-1) - \int_1^x \left(\int_u^s q(t)y(t) dt \right) ds \end{aligned}$$

En divisant par x ,

$$\frac{y(x)}{x} = \frac{y(1)}{x} + \frac{x-1}{x} y'(1) - \frac{1}{x} \int_1^x \left(\int_u^s q(t)y(t) dt \right) ds.$$

17) On fixe un réel $A > 1$.

a) La fonction y est continue sur $[1, A]$ donc $x \mapsto \frac{y(x)}{x}$ est continue sur le segment $[1, A]$ qui est un compact. La fonction est donc bornée et atteint sa borne. Il existe un réel $M_A = \max_{x \in [1, A]} \left| \frac{y(x)}{x} \right|$.

b) Soit $x \in [1, A]$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{y(x)}{x} \right| &\leq \frac{1}{x} |y(1)| + \frac{x-1}{x} |y'(1)| + \frac{M_A}{x} \int_1^x \left(\int_1^s |tq(t)| dt \right) ds \\ &\leq |y(1)| + |y'(1)| + \frac{M_A}{x} \int_1^x \left(\int_1^s |tq(t)| dt \right) ds \end{aligned}$$

c) La fonction $t \mapsto tq(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc, pour tout $s \geq 1$, $\int_1^s |tq(t)| dt \leq r$. On en déduit que pour $x \in [1, A]$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{y(x)}{x} \right| &\leq |y(1)| + |y'(1)| + \frac{M_A}{x} \int_1^x r ds \\ &\leq |y(1)| + |y'(1)| + rM_A \frac{x-1}{x} \\ &\leq |y(1)| + |y'(1)| + rM_A \end{aligned}$$

En prenant x tel que $\left| \frac{y(x)}{x} \right| = M_A$, on obtient $M_A \leq |y(1)| + |y'(1)| + rM_A$ puis $(1-r)M_A \leq |y(1)| + |y'(1)|$. En divisant par $1-r$ qui est strictement positif.

$$M_A \leq \frac{|y(1)| + |y'(1)|}{1-r}.$$

18) D'après la question précédente, pour tout $x \geq 1$,

$$\left| \frac{y(x)}{x} \right| \leq M_x \leq \frac{|y(1)| + |y'(1)|}{1-r}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{y(x)}{x}$ est bornée sur $[1, +\infty[$.

19) a) Soit (s, u) des réels tels que $s \geq u \geq 1$. D'après la question 15,

$$|y'(s) - y'(u)| = \left| \int_u^s q(t)y(t) dt \right| \leq \int_u^s |q(t)y(t)| dt$$

En notant C un majorant de $x \mapsto \frac{y(x)}{x}$, on a pour $t \in [u, s]$,

$$|q(t)y(t)| = |t^2 q(t)| \times \left| \frac{y(t)}{t} \right| \times \frac{1}{t} \leq C \times |t^2 q(t)| \times \frac{1}{u}$$

On en déduit que

$$|y'(s) - y'(u)| \leq \frac{C}{u} \times \int_u^s |t^2 q(t)| dt \leq \frac{K}{u}$$

où $K = C \int_1^{+\infty} |t^2 q(t)| dt$.

En utilisant alors la question 12 on obtient que $y'(x)$ possède une limite finie L lorsque x tend vers $+\infty$.

b) La fonction y est définie sur $[1, +\infty[$ et $y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L$. On peut alors considérer la fonction $z : x \mapsto y(1+x)$ qui est définie sur $[0; +\infty[$. Elle est de classe \mathcal{C}^1 et, pour tout réel x , $z'(x) = y'(x+1)$. On en déduit que $z'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L$.

D'après la question 14, $\frac{z'(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L$. Comme, pour $x \geq 1$, $\frac{y'(x)}{x} = \frac{z'(x-1)}{x} = \frac{z'(x-1)}{x-1} \times \frac{x-1}{x}$, on obtient, $\frac{y'(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L$.

20) Soit y une solution de l'équation (E_1) . Sa restriction à $[1, +\infty[$ est solution de l'équation (E) en prenant $q : t \mapsto -\frac{1}{4t^4}$. Vérifions les hypothèses imposées à q dans la partie IV :

- La fonction $t \mapsto tq(t) = -\frac{1}{4t^3}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann). De plus,

$$r = \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{4} \left[-\frac{2}{t^2} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2} < 1$$

- La fonction $t \mapsto t^2 q(t) = -\frac{1}{4t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann).

La question 19 affirme alors que $\frac{y(x)}{x}$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.