

# Partie I

**I.A.1)** La fonction  $t \mapsto t^{-x}\sqrt{1+t}$  est définie et continue sur  $]0, 1[$ . De plus, au voisinage de 0 à droite, on a

$$t^{-x}\sqrt{1+t} \sim t^{-x} = \frac{1}{t^x},$$

ce qui prouve que l'intégrale définissant  $f$  converge à la borne 0 si, et seulement si  $x < 1$ . Donc  $D = ]-\infty, 1[$ . Notons que si  $x \leq 0$ , l'intégrale est propre.

**I.A.2)** Pour chaque  $t$  de  $]0, 1[$ , la fonction  $x \mapsto t^{-x}\sqrt{1+t}$  est croissante. La fonction  $f$  est donc croissante. ( On rappelle que pour tout nombre réel strictement positif  $a$ , la fonction  $\exp_a$  (exponentielle de base  $a$  définie par  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$ ) est dérivable de dérivée  $\exp'_a(x) = \ln(a) \exp_a(x)$  donc  $\exp_a$  est strictement croissante si  $a > 1$ , strictement décroissante si  $a < 1$  et constante si  $a = 1$ .)

**I.A.3)** L'encadrement

$$\frac{1}{1-x} = \int_0^1 t^{-x} dt \leq f(x) \leq \sqrt{2} \int_0^1 t^{-x} dt = \frac{\sqrt{2}}{1-x},$$

montre que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ . De plus, on a

$$0 \leq f(x) - \int_0^1 t^{-x} dx = \int_0^1 t^{-x}(\sqrt{1+t} - 1) dt = \int_0^1 \frac{t^{-x+1}}{\sqrt{1+t} + 1} dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-x+1} dt = \frac{1}{2(2-x)}.$$

Cette dernière quantité tend vers  $\frac{1}{2}$  quand  $x$  tend vers 1, donc  $f(x) \underset{1-x}{\sim} \frac{1}{1-x}$ .

**I.B.1)** Par une intégration par parties, on obtient, pour  $x < 0$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[ \frac{2}{3} t^{-x} (1+t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + \frac{2}{3} x \int_0^1 t^{-x-1} (1+t) \sqrt{1+t} dt \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} x (f(x+1) + f(x)), \end{aligned}$$

donc

$$(1) \quad \forall x < 0 \quad (3-2x)f(x) = 4\sqrt{2} + 2xf(x+1).$$

**I.B.2)** On a  $f(0) = \int_0^1 \sqrt{1+t} dt = \left[ \frac{2}{3} (1+t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$ . En utilisant la formule (1) ci-dessus, pour  $x = -1$ , on obtient :  $f(-1) = \frac{4}{15} (\sqrt{2} + 1)$ .

**I.B.3)** En posant  $t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{ch} \theta$ , avec  $\theta > 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \int_0^1 \sqrt{t(1+t)} dt = \int_0^1 \sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\alpha \operatorname{sh}^2 \theta d\theta = \frac{1}{8} \int_0^\alpha (\operatorname{ch} 2\theta - 1) d\theta = \frac{1}{8} \left[ \frac{\operatorname{sh} 2\theta}{2} - \theta \right]_0^\alpha \\ &= \frac{1}{8} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha - \frac{\alpha}{8}, \end{aligned}$$

où  $\alpha = \operatorname{arg ch}(3) = \ln(3 + 2\sqrt{2}) = 2 \ln(1 + \sqrt{2})$ , soit, finalement,

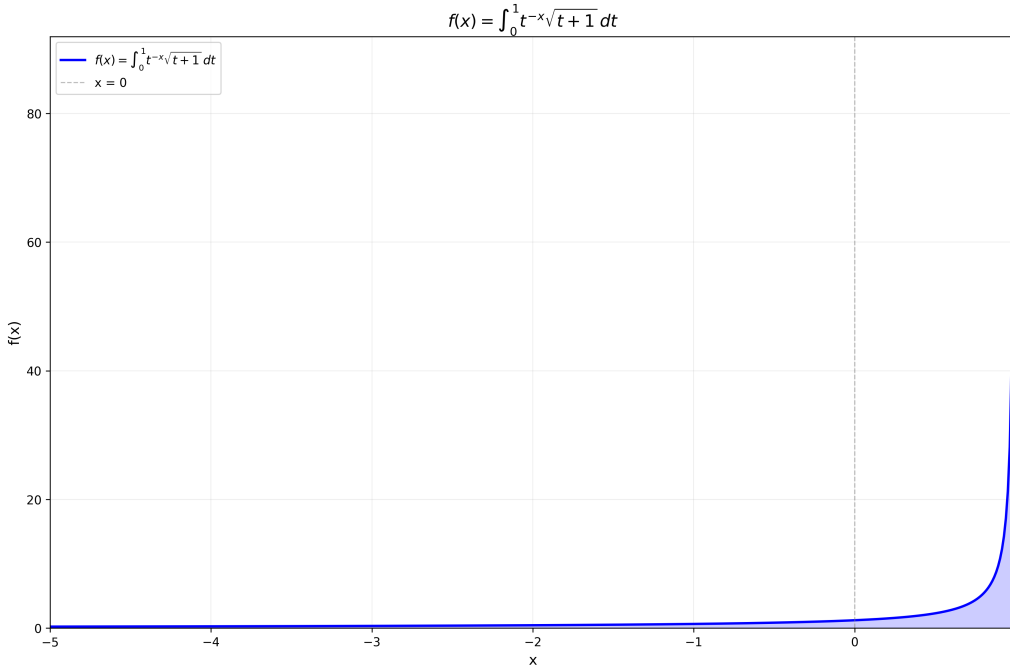
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} (3\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})).$$

En utilisant (1) ci-dessus pour  $x = -\frac{1}{2}$ , on obtient

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}).$$

**I.B.4)** Les valeurs approchées demandées sont  $f(0) \approx 1,219$ ;  $f(-1) \approx 0,644$ ;  $f(-\frac{1}{2}) \approx 0,840$ ;  $f(\frac{1}{2}) \approx 2,296$ .

**I.B.5** Allure de la courbe de  $f$  :



**I.C.1)** La fonction  $t \mapsto \frac{t^{1-x}}{\sqrt{1+t}}$  est définie et continue sur  $[0, 1]$ .

De plus,  $\frac{t^{1-x}}{\sqrt{1+t}} \sim \tilde{0} + t^{1-x}$ , ce qui prouve que l'intégrale définissant  $g$  converge à la borne 0 si, et seulement si,  $x < 2$ .

**I.C.2)** Posons  $u(x, t) = \frac{t^{1-x}}{\sqrt{1+t}}$  pour  $p \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -\infty, 1[ \times ]0, 1]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) = (-\ln t)^n \frac{t^{1-x}}{\sqrt{1+t}}$ , il en découle que si  $a \in ] -\infty, 1[$  alors  $\forall (x, t) \in ] -\infty, a[ \times ]0, 1]$ ,  $|\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t)| \leq (-\ln t)^n \frac{t^{1-a}}{\sqrt{1+t}} = \Psi_a(t)$  et  $\Psi_a$  est continue intégrable sur  $]0, 1]$ . Le théorème concernant les intégrales propres dépendant d'un paramètre montre donc que la fonction  $g$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -\infty, 1[$ , et on a la formule de Leibnitz :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $g^{(n)}(x) = \int_0^1 (-\ln t)^n \frac{t^{1-x}}{\sqrt{1+t}} dt$ .

**I.C.3)** L'intégrale  $I_0$  est propre et vaut 1. Supposons  $I_n$  convergente, par intégration par parties, on obtient :

$$\int_\varepsilon^1 (-\ln t)^{n+1} dt = [t(-\ln t)^{n+1}]_\varepsilon^1 + (n+1) \int_\varepsilon^1 (-\ln t)^n dt$$

comme  $\lim_\varepsilon (-\ln \varepsilon)^{n+1} = 0$ , on en déduit la convergence de  $I_{n+1}$  et la relation  $I_{n+1} = (n+1)I_n$ . On a donc  $I_n = n!$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

**I.C.4)** Prenons  $x \in ] -1, +1[$ . L'application de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R} : t \mapsto \frac{t^{1-x}}{\sqrt{1+t}}$  prend ses valeurs dans  $[0, 1]$ . On a donc :

$$|g^{(n)}(x)| \leq \int_0^1 (-\ln t)^n dt = n!$$

Appliquons alors la formule de Taylor-Lagrange à  $g$  entre  $x$  et  $0$  à l'ordre  $n$  :

$$g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} g^{(k)}(0) + R_n(x)$$

où  $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\vartheta x)$  avec  $\vartheta \in ]0, 1[$ . D'après ce qui précède,

$$|R_n(x)| \leq |x|^{n+1}$$

ce qui prouve que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ , la fonction  $g$  est donc somme de sa série de Taylor sur  $] -1, 1 [$ .

**I.D.1)** Pour  $x < 1$ , une intégration par parties donne

$$f(x) = \left[ \frac{t^{1-x}}{1-x} \sqrt{1+t} \right]_0^1 - \frac{1}{2(1-x)} \int_0^1 \frac{t^{1-x}}{\sqrt{1+t}} dt,$$

soit

$$(2) \quad f(x) = \frac{\sqrt{2}}{1-x} - \frac{1}{2(1-x)} g(x).$$

**I.D.2)** L'encadrement

$$0 \leq g(x) \leq \int_0^1 t^{1-x} dt = \frac{1}{2-x},$$

montre que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ . Il résulte alors de la formule (2) ci-dessus dans de la question I.D.1, que  $f(x) \simeq -\frac{\sqrt{2}}{x}$

**I.D.3)** La fonction  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  et la fonction  $g$  sont développable en série entière sur  $] -1, 1 [$ . Le théorème sur les produits de séries entières montre alors que la fonction  $f$  est également développable en série entière au moins sur  $] -1, 1 [$ . Soit  $R$  le rayon de convergence de cette dernière série entière. On sait que  $R \geq 1$ . Supposons  $R > 1$  et appelons  $f_1$  la somme de la série. la fonction  $f_1$  est définie et continue sur  $] -R, R [$  et coïncide avec  $f$  sur  $] -1, 1 [$ . On aurait donc  $+\infty = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_1(x) = f_1(1)$ , ce qui est absurde. On a donc finalement  $R = 1$ .

## Partie II

**II.A)** La fonction  $t \mapsto t^{n-x}(1+t)^{\frac{1}{2}-n}$  est définie et continue sur  $[0, 1]$ . De plus

$$t^{n-x}(1+t)^{\frac{1}{2}-n} \sim t^{n-x},$$

ce qui prouve que l'intégrale définissant  $f_n$  converge à la borne 0 si , et seulement si,  $x < n + 1$ . Notons que  $f_0 = f$  et  $f_1 = g$ . Une intégration par parties donne, pour  $x < n + 1$ ,

$$f_n(x) = \left[ \frac{t^{n+1-x}}{n+1-x} (1+t)^{\frac{1}{2}-n} \right]_0^1 + \frac{n-\frac{1}{2}}{n+1-x} \int_0^1 t^{n+1-x} (1+t)^{\frac{1}{2}-n-1} dt$$

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{2^n(n+1-x)} + \frac{n-\frac{1}{2}}{n+1-x} f_{n+1}(x)$$

**II.B.1** À partir de la formule précédente, une récurrence évidente prouve que, pour  $x < 1$  et  $n \geq 1$ ,

$$f(x) = \frac{c_0}{1-x} + \frac{c_1}{(1-x)(2-x)} + \cdots + \frac{b_n}{(1-x)\cdots(n-x)} f_n(x)$$

Les deux suites  $(b_n)$  et  $(c_n)$  vérifiant :

$$b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_{n+1} = \left(n - \frac{1}{2}\right) b_n \quad \text{si } n \geq 1$$

$$c_0 = \sqrt{2}, \quad c_n = \frac{\sqrt{2}}{2^n} b_n \quad \text{si } n \geq 1$$

On a donc immédiatement  $b_n = -\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n}$  si  $n \geq 2$  et

$$c_1 = \sqrt{2}; \quad c_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}; \quad c_n = -\sqrt{2} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^{2n}} \quad \text{si } n \geq 2$$

On a donc :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k u_k(x) + R'_n(x) \quad \text{où } R'_n(x) = \frac{b_n}{(1-x)\cdots(n-x)} f_n(x)$$

En observant que  $0 \leq \frac{2k-3}{k-x} \leq 2$  pour tout  $k \geq 2$ , on obtient, pour  $x < 1$

$$\begin{aligned} |R'_n(x)| &\leq \frac{1}{2(1-x)} \int_0^1 t^{n-x} (1+t)^{\frac{1}{2}-n} dt \\ &\leq \frac{1}{2(1-x)} \int_0^1 t^{n-x} dt = \frac{1}{2(1-x)(n+1-x)} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} R'_n(x) &= 0 \quad \text{et} \end{aligned}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k u_k(x) \quad \text{si } x < 1$$

**II.B.2** De même, si  $x \leq x_0 < 1$ , on a  $|R'_n(x)| \leq \frac{1}{2(1-x_0)(n+1-x_0)}$ , ce qui prouve que  $(R'_n(x))$  converge uniformément vers 0 sur  $] -\infty, x_0]$ .

**II.C.1)** Pour  $n \geq 1$  fixé, on a une majoration de  $|R'_n(x)|$  de la forme  $|R'_n(x)| \leq \frac{K_n}{(1-x)\cdots(n+1-x)}$ , où  $K_n$  est une constante. Cette majoration prouve que  $R'_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$  au voisinage de  $-\infty$ . Par ailleurs, chaque  $u_k(x)$  ( $0 \leq k \leq n-1$ ) a évidemment un développement limité en  $\frac{1}{x}$  à l'ordre  $n$  au voisinage de  $-\infty$ , la partie régulière de ce développement étant de valuation  $k+1$ . En on peut écrire

$$f(x) = \frac{d_1}{x} + \cdots + \frac{d_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

**II.C.2)** En développant  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$  et  $u_2(x)$  à l'ordre 3 en  $\frac{1}{x}$ , on trouve aisément :

$$d_1 = -c_0 = -\sqrt{2}, \quad d_2 = -c_0 + c_1 = -\frac{5}{4}\sqrt{2}, \quad d_3 = -c_0 + 3c_1 - c_2 = -\frac{27}{16}\sqrt{2}.$$

On peut aussi utiliser l'identité démontrée en I.B.1 :  $\left(\frac{3}{x} - 2\right) f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{x} + 2f(x+1)$ , et utiliser l'unicité du développement asymptotique pour obtenir les relations :

$$-2d_1 = 4\sqrt{2} + 2d_1, \quad 3d_1 - 2d_2 = -2d_1 + 2d_2, \quad 3d_2 - 2d_3 = 2d_1 - 4d_2 + 2d_3,$$

qui redonnent les valeurs de  $d_1, d_2, d_3$ .

# Partie III

**III.A.1)** Pour  $k \geq 2$ , écrivons  $|a_k| = \frac{1}{2} \prod_{p=2}^k \frac{2p-3}{2p}$  puis

$$\ln |a_k| = -\ln 2 + \sum_{p=2}^k \ln \left( 1 - \frac{3}{2p} \right) \leq -\ln 2 - \frac{3}{2} \sum_{p=2}^k \frac{1}{p}.$$

Or  $\sum_{p=2}^k \frac{1}{p} \geq \int_2^{k+1} \frac{dt}{t} = \ln \frac{k+1}{2}$ . On a donc  $\ln |a_k| \leq -\frac{3}{2} \ln \frac{k+1}{2}$  ou  $|a_k| \leq \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{3}{2}}$ .

Il résulte de cette majoration que la série  $\sum a_k$  est absolument convergente. Il sera commode de poser  $a_0 = 1$  et  $a_1 = \frac{1}{2}$ . La majoration précédente vaut encore pour  $k = 0$  et  $k = 1$ .

**III.A.2)** On sait que  $\sqrt{1+t} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k t^k$  pour  $t \in ]-1, +1[$ . Pour  $x < 1$  et  $t \in ]0, 1[$ , on a donc  $t^{-x} \sqrt{1+t} = t^{-x} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k t^{k-x}$ . Mais la majoration obtenue à la question précédente montre que la série de fonctions  $\sum a_k t^{k-x}$  converge normalement sur  $[0, 1]$  car

$$\forall t \in [0, 1], \forall k \geq 1, \quad |a_k t^{k-x}| \leq |a_k|,$$

et la série  $\sum |a_k|$  est convergente. On peut donc intégrer cette série terme à terme entre 0 et 1, donc

$$f(x) = \int_0^1 t^{-x} dt + \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^{+\infty} a_k t^{k-x} \right) dt = \frac{1}{1-x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1-x}.$$

**III.B.1)** Pour que  $h$  soit définie, il est nécessaire que tous les termes de la série soient définis, c'est-à-dire  $x \notin \mathbb{N}^*$ . C'est également suffisant car, si  $x \notin \mathbb{N}^*$ , la série est absolument convergente d'après la majoration connue de  $|a_k|$ . La fonction  $h$  est donc définie sur  $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$ .

**III.B.2)** Pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , la fonction  $v_k : x \mapsto \frac{a_k}{k+1-x}$  est indéfiniment dérivable sur  $E$ . Fixons  $k_0 \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ . La série  $\sum_{k \geq k_0} v_k^{(p)}(x)$  est normalement convergente sur  $] -\infty, k_0]$ , en effet :

$$\forall k \geq k_0, \forall x \leq k_0 \quad \left| v_k^{(p)}(x) \right| = \left| \frac{p! a_k}{(k+1-x)^{p+1}} \right| \leq p! |a_k|$$

On en déduit que la fonction  $x \mapsto \sum_{k=k_0}^{+\infty} v_k(x)$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -\infty, k_0]$ , la fonction  $h$  est donc  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -\infty, k_0] \setminus \mathbb{N}^*$ . Comme ceci vaut pour tout  $k_0 \in \mathbb{N}$ , la fonction  $h$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $E$ . Notons que le raisonnement précédent prouve que

$$h(x) \underset{k+1}{\sim} \frac{a_k}{k+1-x},$$

pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ .

**III.B.3)** Étudions le signe de  $h'$  sur  $]1, 2[$ . On vient de voir que la série  $\sum_{k>1} \frac{a_k}{(k+1-x)^2}$  est, une série alternée dont le terme général décroît en valeur absolue. En effet, pour  $x \in ]1, 2[$  et  $k \geq 1$ , on a :

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \left( \frac{k+1-x}{k+2-x} \right)^2 \right| = \frac{2k-1}{2k+2} \left( \frac{k+1-x}{k+2-x} \right)^2 < 1$$

On en déduit que la somme de cette série est du signe de son premier terme, c'est-à-dire positif, d'où :

$$h'(x) > \frac{1}{(1-x)^2} > 0$$

Ainsi, la fonction  $h$  est strictement croissante sur  $]1, 2[$ . La remarque de la question précédente montre que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = +\infty$$

**III.C.1)** On sait que

$$h''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{(2-x)^3} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2a_k}{(k+1-x)^3}.$$

Ici encore, la série  $\sum_{k \geq 2} \frac{2a_k}{(k+1-x)^3}$  est alternée et son terme général décroît en valeur absolue lorsque  $x \in ]2, 3[$ . La somme de cette série est donc du signe de son premier terme, c'est-à-dire négatif, d'où

$$h''(x) < \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{(2-x)^3} < 0.$$

**III.C.2)** La fonction  $h'$  est donc décroissante. Un raisonnement analogue à celui de la question III.B.3 montre que  $h'(x) \sim \frac{a_k}{k+1} \frac{1}{(k+1-x)^2}$  pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ . On a donc en particulier  $\lim_{x \rightarrow 2^+} h'(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 3^-} h'(x) = -\infty$ . Il existe donc un unique réel  $\beta$  dans  $]2, 3[$  en lequel  $h'$  s'annule. La fonction  $h$  est donc croissante sur  $]2, \beta[$  et décroissante sur  $[\beta, 3[$ .

En appliquant encore une fois le théorème des séries alternées à  $\sum_{k \geq 2} \frac{a_k}{k+1-z}$  on voit que, pour  $x \in ]2, 3[$ ,

$$h(x) < \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2(2-x)} < 0$$

**III.C.3)** Graphe de  $h$  :

