

Notations :

E désigne un espace vectoriel de dimension finie n , $n \geq 2$, sur le corps \mathbb{K} , avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On note Id l'application identique de E et 0 l'application nulle.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme de E , alors
$$\begin{cases} u^0 = \text{Id} \\ \forall m \in \mathbb{N}, u^{m+1} = u^m \circ u \end{cases},$$

Si $R \in \mathbb{K}[X]$, $R(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$, on rappelle que $R(u) = a_0 \text{Id} + a_1u + \dots + a_pu^p$. On note alors $\mathbb{K}[u] = \{R(u)/R \in \mathbb{K}[X]\}$ l'algèbre des polynômes de u .

On note $\chi_u = \det(X \text{Id} - u)$ le polynôme caractéristique de u et on rappelle que $\chi_u(u) = 0$. Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$ où I_n est la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est le polynôme caractéristique de M .

On note μ_u (resp. μ_M) le polynôme minimal de l'endomorphisme u (resp. la matrice M).

On dit que u est un endomorphisme cyclique s'il existe x_0 dans E tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .

On appelle commutant de u l'ensemble $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E)/u \circ v = v \circ u\}$.

On admettra que $\mathcal{C}(u)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et que $\dim(\mathcal{C}(u)) \geq n$.

$GL_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n sur \mathbb{K} .

On note $\text{Sp}(u)$ le spectre de u et si $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on note $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé à λ .

Partie I : Résultats préliminaires

1. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On pose $e = \sum_{k=1}^n e_k$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E tel que :

$$(\star) \quad \forall x \in E, \text{ la famille } (x, u(x)) \text{ est liée.}$$

Justifier l'existence d'un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $u(e) = \alpha e$. Prouver alors que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $u(e_k) = \alpha e_k$ et en déduire que u est une homothétie vectorielle.

2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire, il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = QBQ^{-1}$. On pose alors : $Q = Q_1 + iQ_2$ avec Q_1 et Q_2 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\{\lambda \in \mathbb{R}/Q_1 + \lambda Q_2 \in GL_n(\mathbb{R})\}$ est non vide.

En déduire que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie II : Matrice compagnon

Soit u un endomorphisme de E .

1. Montrer que u est cyclique si et seulement si, il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle u a pour matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

avec $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.

2. Soit $Q(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Démontrer que le polynôme caractéristique χ_C de C réalise $\chi_C = Q$. En déduire que la matrice C de la question ci-dessus, ne dépend pas de la base \mathcal{B} . On dira que C est la matrice compagnon de u . On dira aussi que C est la matrice compagnon du polynôme Q .
3. Soit λ une valeur propre de C ; déterminer la dimension du sous-espace propre associée. Déterminer une base de ce sous-espace propre.

Partie III : Caractérisation des endomorphismes cycliques

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On se propose dans cette partie de démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) La famille $(\text{Id}, u, \dots, u^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.
- (ii) $\chi_u = \mu_u$.
- (iii) u est cyclique.
- (iv) $\mathbb{K}[u] = \mathcal{C}(u)$

1. Démontrer que (i) \Leftrightarrow (ii).

2. Démontrer que (iii) \Rightarrow (i).

3. Montrer que (iv) \Rightarrow (i).

4. On suppose u cyclique et on choisit x_0 dans E tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .

(a) Soit $g \in \mathcal{C}(u)$. Justifier l'existence de $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x_0)$, montrer alors que $g \in \mathbb{K}[u]$.

(b) En déduire qu'on a (iv).

5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que la famille $(\text{Id}, u, u^2, \dots, u^{n-1})$ est libre et on se propose de montrer que u est un endomorphisme cyclique. On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on pose : $\chi_u = \prod_{k=1}^s (X - \lambda_k)^{m_k}$ où les λ_k sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u et m_k leur multiplicités respectives. Pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$, on pose $E_k = \ker(u - \lambda_k \text{Id})^{m_k}$.

- (a) Démontrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E tel que la matrice de u relativement à \mathcal{B} est diagonale par blocs $C_k \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{K})$, tel que :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} C_1 & & & & \\ & \ddots & (0) & & \\ & & (0) & \ddots & \\ & & & & C_s \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

- (b) En utilisant la matrice compagnon de χ_u montrer que u est cyclique.
6. Démontrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'étude faite dans la question 5) ci-dessus est valable. (On pourra utiliser le résultat de la question 2) du préliminaire).
7. Conclure par une synthèse à propos des équivalences de (i),(ii),(iii) et (iv).

Partie IV : Endomorphisme scindé

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé. Précisément, on suppose que :

$$\chi_u = \prod_{k=1}^s (X - \lambda_k)^{m_k}$$

avec $s \in \mathbb{N}^*$, les $\lambda_k \in \mathbb{K}$, $m_k \in \mathbb{N}^*$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u . On rappelle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'entier m_k est la multiplicité de λ_k dans le polynôme caractéristique χ_u et s le nombre des valeurs propres distinctes de u . Pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$, on note $E_k = \ker(u - \lambda_k I)^{m_k}$ et $d_k = \dim(E_k)$.

1. Justifier que $E = \bigoplus_{k=1}^s E_k$ et que les E_k sont stables par u . On note alors u_k l'endomorphisme de E_k induit par u et Id_k l'application identique de E_k .
2. Prouver que $d_k \leq m_k$. (On pourra remarquer que $(u_k - \lambda_k \text{Id}_k)^{m_k} = 0$.)
3. Comparer les sommes $\sum_{k=1}^s d_k$ et $\sum_{k=1}^s m_k$ et en déduire que $m_k = d_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$.
4. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et m la multiplicité de λ dans χ_u .

- (a) Justifier les inclusions :

$$(\star\star\star) \quad \ker(u - \lambda \text{Id}) \subset \ker(u - \lambda \text{Id})^2 \subset \dots \subset \ker(u - \lambda \text{Id})^m$$

- (b) Démontrer que si $\dim(\ker(u - \lambda \text{Id})) = 1$ alors les inclusions de $(\star\star\star)$ sont strictes et qu'alors : $\dim(\ker(u - \lambda \text{Id})^j) = j$ pour tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$
- (c) En déduire que si tous les sous-espaces propres de u sont des droites vectorielles alors le polynôme minimal de u est égal à son polynôme caractéristique, c'est-à-dire $\chi_u = \mu_u$.

5. Énoncer sous forme de théorème le résultat démontré dans cette partie.

Partie V : Endomorphisme scindé simple

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé à racines simples et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u et e_1, \dots, e_n des vecteurs propres associés.

1. Justifier que $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .
2. Soit $e = \sum_{k=1}^n e_k$. Démontrer que $\text{Vect}\{u^k(e)/k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\} = E$.
3. Démontrer que u est un endomorphisme cyclique.
4. Décrire $\mathcal{C}(u)$ en précisant $\dim(\mathcal{C}(u))$.

Partie VI : Endomorphismes cycliques en dimension 2 et 3

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
 - (a) Démontrer que soit A est une matrice scalaire, c'est-à-dire, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_2$, soit A est semblable à la matrice $F = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ 1 & \tau \end{pmatrix}$ où $\tau = \text{tr}(A)$ et $\delta = \det(A)$.
 - (b) **Exemple :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $A = PFP^{-1}$ où $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
 - (c) Énoncer le résultat démontré dans la question 1)a) de cette partie, pour les endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ où E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 2.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A .
 - (a) Démontrer que si $\chi_A = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts alors u est un endomorphisme cyclique.
 - (b) Démontrer que si $\chi_A = (X - \alpha)^2(X - \beta)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ non forcément distincts, alors u est un endomorphisme cyclique si et seulement si $\text{rg}(A - \alpha I_3) = 2$.
 - (c) On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que $\chi_A = (X - \alpha)(X^2 - cX - b)$, avec $\alpha, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $c^2 + 4b < 0$.
 - i. Justifier que $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \alpha \text{Id}) \oplus \ker(u^2 - cu - b \text{Id})$
 - ii. Soit $V_1, V_2 \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$V_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad V_2 \neq 0 \quad \text{et} \quad V_1 \in \ker(u - \alpha \text{Id}) \quad \text{et} \quad V_2 \in \ker(u^2 - cu - b \text{Id}).$$
Justifier l'existence de tels vecteurs et démontrer que si $V = V_1 + V_2$, alors $(V, u(V), u^2(V))$ est une base de \mathbb{R}^3 . Que peut on dire de u ?
3. Dans cette question $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\text{mat}_{\mathcal{E}}(u) = A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) calculer le polynôme caractéristique χ_u de u et en déduire que u est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de u de sorte que : $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
- (b) Diagonaliser u dans une base de vecteurs propres V_1, V_2, V_3 associés respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, la troisième coordonnée de V_k par rapport à \mathcal{E} vaut 1.
- (c) Montrer que u est un endomorphisme cyclique de E . Donner la matrice compagnon associée à u et un vecteur $e \in E$ tel que $(e, u(e), u^2(e))$ est une base de E .
- (d) Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de E stables par u .
- (e) Soit $F = \text{Vect}(V_1, V_2)$. Justifier que F est stable par u . Démontrer que l'endomorphisme induit u_F est cyclique. Déterminer la matrice compagnon associée à u_F et un vecteur $\omega \in F$ tel que $(\omega, u(\omega))$ est une base de F .
4. Dans cette question $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\text{mat}_{\mathcal{E}}(u) = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) calculer le polynôme caractéristique χ_u de u . L'endomorphisme u est-il diagonalisable? En déduire le polynôme minimal μ_u de u .
- (b) Déterminer les valeurs propres λ_1, λ_2 de u de sorte que : $\lambda_1 < \lambda_2$, ainsi que les vecteurs propres associés V_1 et V_2 de sorte que la première coordonnée de chacun d'eux dans la base \mathcal{E} est égale à 1.
- (c) Montrer que u est un endomorphisme cyclique de E . Donner la matrice compagnon associée à u et un vecteur $e \in E$ tel que $(e, u(e), u^2(e))$ est une base de E .
- (d) Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de E stables par u .
- (e) Soit $F = \text{Vect}(V_1, V_2)$. Justifier que F est stable par u . Démontrer que l'endomorphisme induit u_F est cyclique. Déterminer la matrice compagnon associée à u_F et un vecteur $\omega \in F$ tel que $(\omega, u(\omega))$ est une base de F .

Partie VII : Endomorphismes nilpotents cycliques

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. Si c'est le cas, le plus petit entier non nul p tel que $u^p = 0$ s'appelle l'indice de nilpotence de u . Désormais, dans cette partie, u désigne un endomorphisme de E .

1. On suppose dans cette question $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Montrer que u est cyclique et déterminer sa matrice compagnon. Quelle est la dimension du noyau de u ?
2. On suppose maintenant u nilpotent d'indice de nilpotence p . Pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on pose : $N_k = \ker u^k$ et $n_k = \dim N_k$.
On suppose également que $n_1 = 1$.
 - (a) Montrer que $\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, N_k \subset N_{k+1}$ et $u(N_{k+1}) \subset N_k$.

(b) En considérant l'application $\varphi : N_{k+1} \rightarrow N_k; x \mapsto u(x)$, montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, n_{k+1} \leq 1 + n_k.$$

(c) Montrer par récurrence que : $n_k = n_{k+1} \Rightarrow \forall j \geq k, N_j = N_k$.

En déduire que $p = n$ et déterminer n_k pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

3. Enoncer sous forme de théorème la résultat démontré dans cette partie.

Partie VIII : Cycles

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que u est un « p -cycle » si, et seulement si, il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ soit une famille génératrice de E et $u^p(x_0) = x_0$.

1. Dans cette partie, u désigne un p -cycle et soit alors $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ soit une famille génératrice de E et $u^p(x_0) = x_0$.

(a) Montrer que $u^p = I$.

(b) Soit $\mathcal{E} = \{k \in \mathbb{N}^* / (x_0, u(x_0), \dots, u^{k-1}(x_0)) \text{ est une famille libre}\}$.

Montrer que \mathcal{E} admet un maximum noté m .

(c) Montrer que : $\forall k \geq m, u^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, u(x_0), \dots, u^{m-1}(x_0))$.

En déduire que u est cyclique.

Déterminer le nombre de valeurs propres distinctes de u .

2. Dans cette question, u désigne un n -cycle. Déterminer C , matrice compagnon de u .

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et, pour $k \in \mathbb{Z}$, $U_k = \begin{pmatrix} \bar{\omega}^k \\ \bar{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \bar{\omega}^{nk} \end{pmatrix}$. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer CU_k .

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $M = (m_{k,l})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq n}}$, avec $m_{k,l} = \bar{\omega}^{kl}$.

Calculer $M\bar{M}$; en déduire que $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et calculer M^{-1} .

4. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \dots & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \dots & \dots & a_2 \\ \vdots & \dots & & & \vdots \\ \vdots & \dots & & a_0 & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A .