

## Exercice

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , on pose  $\text{Vect}(u, v)$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  engendré par  $u$  et  $v$ .

- On pose  $f_1 = (1, 1, 1)$  et  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0\}$ .
  - Déterminer deux vecteurs  $f_2$  et  $f_3$  de  $\mathbb{R}^3$  tels que  $F = \text{Vect}(f_2, f_3)$ , avec  $f_2 = (a, 0, b)$  et  $f_3 = (0, c, d)$ , où  $a, b, c$ , et  $d$  sont à déterminer.
  - Montrer que la famille  $(f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- Vérifier que  $A^2 - 3A + 2I = O$  avec  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , la matrice nulle.
  - Montrer que  $A$  est inversible et déterminer son inverse  $A^{-1}$ .
- Déterminer les deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $A \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$   
et  $A \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix}$ , où  $a, b, c$  et  $d$  sont les réels trouvés dans la question 1.a).
  - Qu'est ce qu'elles représentent  $\alpha$  et  $\beta$  pour la matrice  $A$ ? Justifier votre réponse.
- Montrer qu'il existe une matrice diagonale  $D$  et une matrice  $P$  inversible, qui sont à déterminer, telles que  $A = PDP^{-1}$ .
  - Montrer par récurrence sur  $n$ , que pour tout entier naturel  $n$ ,  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

## Problème

On désigne par  $n$  un entier naturel non nul et  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On note  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  l'espace vectoriel réel des matrices colonnes à  $n$  lignes. Pour une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on désigne par  $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$  le polynôme caractéristique de  $M$ . On note  ${}^tM$  la matrice transposée de la matrice  $M$  et  $\text{Tr}(M)$  la trace de la matrice carrée  $M$ . On rappelle que pour toute matrice  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$ .

On note  $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  la matrice diagonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui admet pour coefficients diagonaux les réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  dans cet ordre.

On désigne par  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire  $\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), {}^tS = S$ .

On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices  $S$  de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telles que,  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX \geq 0$ .

$\mathbb{R}^+$  désigne l'ensemble des réels positifs et  $\mathbb{R}^{*+}$  désigne l'ensemble des réels strictement positifs.

Le problème traite des propriétés et des applications qui sont autour de la notion de trace.

### Partie 1 : Préliminaires

- Montrer que l'application  $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, M \mapsto \text{Tr}(M)$ , est linéaire.
- Soit  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  et  $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- (a) Montrer que  $\text{Tr}(MN) = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^n m_{\ell,k} n_{k,\ell}$ .
- (b) Montrer que  $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$ .
- (c) Montrer que si  $M$  et  $N$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  alors  $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(N)$ .
3. On considère l'ensemble  $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); M \text{ est diagonale et } \text{Tr}(M) = 0\}$ .
- (a) Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- (b) Déterminer la dimension de  $F$ .
- (c) En déduire, pour toute matrice inversible  $P$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la dimension du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $G = PFP^{-1} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); M = PDP^{-1} \text{ et } D \in F\}$
4. Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On considère l'application,

$$\phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad X \mapsto X + (\text{Tr}(X))A$$

- (a) Vérifier que  $\phi_A$  est une application linéaire.

**Soit  $B$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On considère l'équation matricielle :**

$$(\star) \quad \phi_A(X) = B$$

- (b) On suppose dans cette question que  $\text{Tr}(A) \neq -1$ .
- i. On suppose que  $M$  est une solution de l'équation matricielle  $(\star)$ . Déterminer  $\text{Tr}(M)$  en fonction de  $\text{Tr}(A)$  et de  $\text{Tr}(B)$ .
- ii. Résoudre dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'équation matricielle  $(\star)$ .
- iii. En déduire que  $\phi_A$  est un automorphisme d'espaces vectoriels.
- (c) On suppose maintenant que  $\text{Tr}(A) = -1$ .
- i. Résoudre dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , selon les valeurs de  $\text{Tr}(B)$ , l'équation matricielle  $(\star)$ .
- ii. Montrer que  $\phi_A$  est un projecteur sur un sous-espace vectoriel  $F_1$  parallèlement à un sous-espace vectoriel  $F_2$ . Déterminer  $F_1$  et  $F_2$ .

## Partie 2 : La valeur absolue de la trace comme étant une fonction génératrice

On prend dans cette partie  $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On rappelle que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel rapporté à la base canonique  $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , où pour tous entiers  $i$  et  $j$  tels que  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $E_{i,j}$  désigne la matrice de  $\mathcal{E}$  dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne qui est égal à 1. Pour tous entiers  $h$  et  $k$  tel que  $1 \leq h, k \leq n$ , on désigne par  $\delta_{h,k}$  le symbole de Kronecker qui est défini par  $\delta_{h,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } h = k \\ 0 & \text{si } h \neq k \end{cases}$ . On rappelle que pour tous entiers naturels  $i, j, k, \ell$  tel que  $1 \leq i, j, k, \ell \leq n$ ,  $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$ . Une application  $q$  de  $\mathcal{E}$  vers  $\mathbb{R}^+$  est dite semi-norme si elle vérifie :

- $\forall M \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, q(\lambda M) = |\lambda|q(M)$ .
- $\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, q(M + N) \leq q(M) + q(N)$ .

On dit qu'une semi-norme  $q$  sur  $\mathcal{E}$  vérifie la propriété  $(\mathcal{P})$  si  $\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, q(MN) = q(NM)$ .

1. **Soit  $q$  une semi-norme sur  $\mathcal{E}$ .**

- (a) Montrer que  $q(O) = 0$ , où  $O$  est la matrice nulle, et que pour tout  $M \in \mathcal{E}$ ,  $q(-M) = q(M)$ .
- (b) Montrer que pour tout  $(M, N)$  de  $\mathcal{E}^2$ ,  $|q(M) - q(N)| \leq q(M + N)$ .
- (c) Montrer que pour tout  $(M, N)$  de  $\mathcal{E}^2$ , si  $q(N) = 0$  alors  $q(M + N) = q(M)$ .
2. On considère l'application  $f$  définie de  $\mathcal{E}$  vers  $\mathbb{R}^+$  par  $f(M) = |\text{Tr}(M)|$ . Montrer que  $f$  est une semi-norme qui vérifie la propriété ( $\mathcal{P}$ ).

**Dans les questions 3) et 4) de cette partie, on suppose que  $n \geq 2$ .**

3. Soit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  une famille d'éléments de  $\mathbb{K}$  et soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $E$  telles que,

$$A = \sum_{j=1}^n E_{1,j} + \sum_{i=2}^n E_{i,i} \quad \text{et} \quad B = \sum_{h=1}^n \alpha_h E_{h,1}$$

(a) Montrer que  $AB = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j\right)E_{1,1} + \sum_{i=2}^n \alpha_i E_{i,1}$ .

(b) Montrer que  $BA = \sum_{h=1}^n \left(\alpha_h \sum_{j=1}^n E_{h,j}\right)$ .

4. **Soit  $q$  une semi-norme sur  $\mathcal{E}$  qui vérifie la propriété ( $\mathcal{P}$ ).**

Soit  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  un élément de  $\mathcal{E}$ .

- (a) Montrer que pour tous entiers distincts  $i$  et  $j$  tel que  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $q(E_{i,j}) = 0$ , (on pourra utiliser le fait que  $E_{i,j} = E_{i,i}E_{i,j}$ ).

- (b) Par l'axiome de l'inégalité triangulaire vérifié par  $q$  et qu'on peut étendre facilement (par récurrence) à plus de deux vecteurs, on a  $q\left(\sum_{i=2}^n m_{i,1}E_{i,1}\right) \leq \sum_{i=2}^n m_{i,1}q(E_{i,1})$ , or  $q(E_{i,1}) = 0$  en vertu de la question précédente, donc  $q\left(\sum_{i=2}^n m_{i,1}E_{i,1}\right) = 0$ .

(c) En déduire que  $q\left(\sum_{i=2}^n m_{i,1}E_{i,i}\right) = 0$

(d) Vérifier que  $q(M) = q\left(\sum_{i=1}^n m_{i,i}E_{i,i}\right)$ .

- (e) Montrer en prenant des valeurs précises pour  $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$  qui définissent la matrice  $B$ , que  $q(M) = q(BA)$ .

- (f) Montrer qu'il existe un réel positif  $\alpha$  tel que  $q = \alpha f$ .

5. Dans le cas  $n = 1$ , le résultat démontré ci-dessus reste-t-il valable? justifier votre réponse.

### Partie 3 : Caractérisation d'une matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ par la notion de trace

$\mathcal{O}(n)$  désigne l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  c'est-à-dire des matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  ${}^tMM = I_n$ .

1. On considère une matrice  $S$  de  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

- (a) Soit la matrice  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  telle que pour tout entier  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $\lambda_k$  sont des réels positifs. Soit  $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  une matrice de  $\mathcal{O}(n)$ .

i. Montrer que pour tous entiers  $k$  et  $i$ ,  $1 \leq k, i \leq n$ ,  $|u_{k,i}| \leq 1$ .

ii. Vérifier que  $DU = (\lambda_i u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ .

iii. En déduire que  $\text{Tr}(DU) \leq \text{Tr}(D)$ .

(b) Soit  $U$  une matrice de  $\mathcal{O}(n)$ .

i. Montrer qu'il existe une matrice  $P$  de  $\mathcal{O}(n)$  et une matrice  $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , avec pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $\alpha_i$  sont des réels positifs et  $S = PD({}^tP)$ .

ii. Montrer, en posant  $V = {}^tPUP$ , que  $SU = P(DV)({}^tP)$ .

iii. En déduire que  $\text{Tr}(SU) \leq \text{Tr}(S)$

2. Réciproquement, soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que,

$$\forall U \in \mathcal{O}(n), \quad \text{Tr}(AU) \leq \text{Tr}(A)$$

(a) i. Montrer que, pour tous réels  $a, b, \alpha$ , il existe un réel  $\varphi$  tel que

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi)$$

ii. En déduire que, si pour tout réel  $\alpha$ ,  $a \cos \alpha + b \sin \alpha \leq a$  alors  $b = 0$ .

(b) Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base orthonormée de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  pour son produit scalaire usuel. On note, pour tous entiers  $p$  et  $q$  tels que  $1 \leq p < q \leq n$ ,  $\pi_{p,q}$  le plan engendré par la famille  $(e_p, e_q)$ . On considère  $u_{p,q}$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  tel que la restriction de  $u_{p,q}$  sur  $\pi_{p,q}$  est la rotation de l'angle  $\alpha$  et la restriction de  $u_{p,q}$  sur l'orthogonal de  $\pi_{p,q}$  est l'identité.

i. Écrire la matrice  $U_{1,2}$  de  $u_{1,2}$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ . Montrer que  $U_{1,2}$  est une matrice orthogonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

ii. Calculer  $\text{Tr}(AU_{1,2})$  en fonction de  $a_{1,2}$ ,  $a_{2,1}$ ,  $(a_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$  et de  $\alpha$ .

iii. En déduire que  $a_{1,2} = a_{2,1}$ .

iv. Écrire, dans le cas général, la matrice  $U_{p,q}$  de  $u_{p,q}$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .

v. Calculer, dans le cas général,  $\text{Tr}(AU_{p,q})$  en fonction de  $a_{p,q}$ ,  $a_{q,p}$ ,  $(a_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$  et de  $\alpha$ .

vi. En déduire que  $A$  est une matrice symétrique.

(c) i. Justifier qu'il existe une base orthonormée  $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $A$ .

Pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n$ , on note  $\gamma_i$  la valeur propre de  $A$  associée à  $v_i$ ,

ii. Soit  $j$  un entier tel que  $1 \leq j \leq n$ . On considère l'endomorphisme  $w_j$  de  $\mathbb{R}^n$  défini par  $w_j(v_j) = -v_j$  et pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$  et  $k \neq j$ ,  $w_j(v_k) = v_k$ . Soit  $W_j$  la matrice de  $w_j$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .

Vérifier que  $W_j$  est une matrice orthogonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et déterminer  $\text{Tr}(AW_j)$  en fonction de  $\text{Tr}(A)$  et de  $\gamma_j$ . En déduire que  $\gamma_j \geq 0$ .

(d) En déduire que  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .