ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰ ⴷ
ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ ⴷ ⵓⵙⵏⵓⴼⵍ

المملكة المغربية
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي والابتكار

Royaume du Maroc
Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Recherche Scientifique et de l'Innovation

ENSEM

CONCOURS NATIONAL COMMUN

D'Admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Session 2025

Épreuve de **Mathématiques I**

Filière : **MP**

Durée : **4 heures**

Cette épreuve comporte **4 pages** au format A4, en plus de cette page de garde.

IMPORTANT
L'usage de tout document et de tout système électronique ou informatique est interdit durant cette épreuve.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.

L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation. la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\textit{références}}$ *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé. il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

EXERCICE

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ à valeurs réelles. On note φ_f l'application définie, pour tout réel x, pour lequel l'intégrale existe, par,

$$\varphi_f(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)e^{-t}dt$$

On suppose de plus que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+; \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad |f(x,t)| \leq M$$

1. a) Montrer que, pour tout (x,t) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $\left|f(x,t)e^{-t}\right| \leq Me^{-t}$.

b) En déduire que φ_f est définie sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(x,t)e^{-t} = 0$.

2. On considère les deux fonctions réelles g et h définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$par,

$$g(x,t) = \cos(xt) \text{ et } h(x,t) = \sin(xt)$$

a) Vérifier que φ_g et φ_h sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer, en appliquant une intégration par parties, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_g(x) = 1 - x\varphi_h(x)$$

c) Montrer, en appliquant une intégration par parties, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_h(x) = x\varphi_g(x)$$

d) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

e) Montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \int_0^x \varphi_g(u)du + \int_0^{\frac{1}{x}} \varphi_g(u)du = \frac{\pi}{2}$$

et

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \int_0^x \varphi_h(u)du - \int_0^{\frac{1}{x}} \varphi_h(u)du = \ln x$$

PROBLÈME

Soit f une fonction continue sur $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ à valeurs réelles, où $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n et pour tout réel t dans $\mathcal{D}_2$, on définit la fonction $g_{(n,t)}$ de $\mathcal{D}_1$ dans $\mathbb{R}$ par,

$$g_{(n,t)}(x) = x^n f(x,t)$$

$\mathbb{R}^{*+}$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs. On utilise, dans tout le problème, la convention $0^0 = 1$.

Partie 1 : Étude d'une série géométrique particulière et son application

Dans cette partie, on prend, $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x,t) = 1$, ainsi, on pose, pour tout entier naturel n et pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = g_{(n,t)}(x) = x^n$.

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x différent de 1 ,

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout nombre réel x différent de 1 ,

$$\sum_{k=1}^{n} k f_{k-1}(x) = \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

c) i) Justifier que, pour tout réel x dans $]-1,1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n x^n = 0$.

ii) En déduire que, pour tout réel x dans $]-1,1[$, la série $\sum\limits_{n \geq 1} n f_{n-1}(x)$ est convergente et que,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2. Pour tout entier naturel j, on considère la fonction S_j définie par $S_j(x) = \sum\limits_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} f_{n-j}(x)$.

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant la fonction S_j.

b) Montrer que la fonction S_j est dérivable sur $]-1,1[$ et que pour tout x dans $]-1,1[$,

$$S_j'(x) = (j+1) S_{j+1}(x)$$

c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j et pour tout réel x dans $]-1,1[$,

$$S_j(x) = \frac{1}{(1-x)^{j+1}}$$

d) Montrer que, pour tout réel x dans $]-1,1[$, la série $\sum\limits_{n \geq 1} n^2 f_{n-1}(x)$ est convergente et que,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 f_{n-1}(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit p un réel de $]0,1[$. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui suit la loi géométrique de paramètre p, c'est-à-dire une application X de Ω vers $\mathbb{R}$, telle que,

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

a) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ qu'on déterminera en fonction de p.
b) Montrer que X^2 admet une espérance $E(X^2)$ qu'on déterminera en fonction de p.
c) En déduire $V(X)$ la valeur de la variance de X en fonction de p.

Partie 2 : La résolution d'une équation différentielle

Pour tout entier naturel n, on considère l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$:

$$(\mathcal{E}_n) \quad y'' + y = \frac{n!}{t^{n+1}}$$

Dans cette partie, on prend pour tout (x, t) dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{*+}$, $f(x,t) = \dfrac{e^{-tx}}{1+x^2}$.

1. Montrer que, pour tout réel strictement positif t, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_{(n,t)}(x)dx$ converge.

On note ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^{*+}, h_n(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_{(n,t)}(x)dx$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, h_n est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que $h_n' = -h_{n+1}$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel k, h_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et déterminer $h_n^{(k)}$, la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la fonction h_n, en fonction de h_{n+k}.
4. On pose pour tout entier naturel n et pour tout réel strictement positif t,

$$I_n(t) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-tx} dx$$

a) Vérifier que, pour tout entier naturel n et pour tout réel strictement positif $t, I_n(t)$ existe.
b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel strictement positif t,

$$I_n(t) = \frac{n}{t} I_{n-1}(t)$$

c) Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel strictement positif t,

$$I_n(t) = \frac{n!}{t^{n+1}}$$

d) En déduire que, pour tout entier naturel n et pour tout réel strictement positif t,

$$h_n''(t) + h_n(t) = \frac{n!}{t^{n+1}}$$

e) Déterminer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} h_n(t)$.
5. a) Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle : $(\mathcal{EH}) \quad y'' + y = 0$
b) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation différentielle $(\mathcal{E}_n)$ admet sur $]0, +\infty[$ une et une seule solution k_n, qui vérifie $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} k_n(t) = 0$, préciser k_n.

Partie 3 : Une autre expression de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} dx$

1. Soit k un entier naturel et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge.

On considère la fonction réelle ψ définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $\psi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)dt$.

Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et déterminer $\psi^{(k+1)}$ en fonction de $\varphi^{(k)}$.

2. a) Montrer que, pour tout couple (t,u) de $\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R}$ et pour tout réel s tel que $s>t$,

$$\int_t^s \frac{\sin(x-u)}{x}dx = \frac{\cos(t-u)}{t} - \frac{\cos(s-u)}{s} - \int_t^s \frac{\cos(x-u)}{x^2}dx.$$

b) Montrer que, pour tout couple (t,u) de $\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_t^{+\infty}\frac{\sin(x-u)}{x}dx$ est convergente et que,

$$\int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-u)}{x}dx = \frac{\cos(t-u)}{t} - \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x-u)}{x^2}dx$$

Ainsi, on considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R}$ par $\phi(t,u) = \displaystyle\int_t^{+\infty}\frac{\sin(x-u)}{x}dx$.

On définit aussi la fonction θ sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $\theta(t) = \phi(t,t) = \displaystyle\int_t^{+\infty}\frac{\sin(x-t)}{x}dx$.

c) Montrer que, pour tout entier naturel k, θ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

d) Montrer que, pour tout t de $\mathbb{R}^{*+}, \theta''(t)+\theta(t) = \dfrac{1}{t}$.

e) Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\theta(t) = 0$.

3. En déduire que $\forall t\in\mathbb{R}^{*+}, \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+x^2}dx = \int_t^{+\infty}\frac{\sin(x-t)}{x}dx$.

4. Déterminer la nature de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ tel que pour tout entier naturel n,

$u_n = \displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{\sin(x-n)}{x}dx$.

Partie 4 : Application : le calcul de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ est une intégrale convergente.

2. a) Montrer que $\forall t\in\mathbb{R}^{*+}, \displaystyle\int_0^1\frac{\sin x}{(x+t)x}dx$ est convergente et que,

$$\left|\int_{+\infty}^1 \frac{\sin x}{(x+t)x}dx\right| \leq \int_0^1 \frac{1}{x+t}dx$$

b) Montrer que $\forall t\in\mathbb{R}^{*+}, \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{(x+t)x}dx$ est convergente et que,

c) Montrer que $\forall t\in\mathbb{R}^{*+}, \left|\theta(t) - \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leq t(1+\ln(1+t)-\ln t)$.

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

4. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx$ est convergente et en déduire sa valeur.

5. Montrer que les intégrales $J = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ et $K = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$ sont convergentes et calculer leurs valeurs respectives.

FIN DE L'ÉPREUVE