EPREUVE COMMUNE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures - coefficient : 8

N. B : Le sujet comprend 3 parties, qui ne sont pas indépendantes.
Il est recommandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé.
Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'ils ne les ont pas démontrés.
Les résultats devront être soulignés ou encadrés.
Il sera tenu compte dans la notation de la qualité de la rédaction et de la présentation matérielle.
On note **N** l'ensemble des entiers naturels, **Z** l'ensemble des entiers relatifs, **R** l'ensemble des réels, et **C** l'ensemble des complexes.
On note $\mathbf{R}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients réels, et $\mathbf{R}_n[X]$ ($n \in \mathbf{N}$) la partie de $\mathbf{R}[X]$ formée des polynômes de degré inférieur ou égal à n et du polynôme nul.
On rappelle qu'un anneau possède un élément unité pour la multiplication.
Etant donné un anneau **K** et un entier naturel n, on note $\mathbf{M}_n(\mathbf{K})$ l'anneau des matrices carrées d'ordre n dont les éléments appartiennent à **K**. On note I la matrice identité et 0 la matrice nulle de $\mathbf{M}_n(\mathbf{K})$.

Partie I :

1°) Soit A une matrice de $\mathbf{M}_2(\mathbf{Z})$:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \qquad (a, b, c, d \in \mathbf{Z})$$

Montrez que A admet une matrice inverse A^{-1} pour la multiplication dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{Z})$ si et seulement si :

$$\det(A) \in \{-1, 1\} \qquad (1)$$

et donnez alors l'expression de A^{-1} en fonction de a, b, c, d.

2°) On désigne par A une matrice de $\mathbf{M}_2(\mathbf{Z})$ telle qu'il existe un entier p strictement positif tel que : $A^p = I$

et on note E l'ensemble de ces matrices.

a) Montrez que A admet une matrice inverse pour la multiplication dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{Z})$.

b) Montrez que toute valeur propre de A (dans **C**) est de module 1.

c) A étant un élément quelconque de E, montrez que le polynôme caractéristique de A appartient à un ensemble fini que l'on précisera.

d) Montrez que A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{C})$.

On précisera en particulier tous les couples de valeurs propres possibles (λ_1, λ_2).

e) Montrez que pour tout élément A de E, l'ensemble des entiers k strictement positifs tels que :

$$A^k = I$$

comporte un plus petit élément, soit p_A. Quel est, en fonction de p_A, l'ensemble des entiers naturels k tels que $A^k = I$?

f) Montrez que l'ensemble G défini par :

$$G = \{ p_A, A \in E \}$$

est fini, et précisez cet ensemble. Pour chaque élément de G, donnez un exemple de matrice A associée.

3°) Soit A une matrice de $\mathbf{M}_2(\mathbf{Z})$ telle que :

$$A^2 - A + I = 0$$

a) Donnez un exemple d'une telle matrice A.

b) Montrez que A appartient à E et précisez l'entier p_A associé (voir 2°) e)).

c) Déterminez les termes généraux des deux suites réelles $(\alpha_p)_{p \in \mathbf{N}}$ et $(\beta_p)_{p \in \mathbf{N}}$ telles que

$$\forall p \in \mathbf{N}, \ A^p = \alpha_p A + \beta_p I$$

4°) Soit n un entier naturel strictement positif, et A une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbf{Z})$ telle que :

$$A^2 - A + I = 0$$

a) Montrez que l'entier n est pair (on pourra par exemple faire intervenir les valeurs propres de la matrice A).

b) Réciproquement, si l'entier strictement positif n est pair, montrez qu'il existe une matrice A de $\mathbf{M}_n(\mathbf{Z})$ telle que :

$$A^2 - A + I = 0$$

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

Partie II :

Dans cette partie, n désigne un entier pair non nul, et A désigne une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbf{Z})$ telle que :

$$A^2 - A + I = 0$$

1°) Soit ϕ_A l'application de $\mathbf{R}[X]$ dans $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \phi_A(P) = P(A)$$

c'est à dire : si $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_k X^k$

$$P(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_k A^k$$

a) Montrez que ϕ_A est une application linéaire.

b) Montrez que si P et Q sont deux polynômes quelconques de $\mathbf{R}[X]$, alors : $\phi_A(PQ) = \phi_A(P)\,\phi_A(Q)$

2°) a) Soit $P(X) = a_0 + a_1 X$ $(a_0, a_1 \in \mathbf{R})$

Montrez que $P(A) = 0$ équivaut à $a_0 = a_1 = 0$

b) Déduisez-en que pour tout polynôme P de $\mathbf{R}[X]$, il existe un et un seul polynôme R de $\mathbf{R}_1[X]$ tel que : $P(A) = R(A)$

Quel est le noyau de ϕ_A ?

3°) Soit S l'image de ϕ_A.

Montrez que S est un corps commutatif, pour l'addition et la multiplication usuelles des matrices.

Partie III :

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathbf{M}_2(\mathbf{Z})$ vérifiant :

$$A^2 - A + I = 0$$

1°) On dit qu'une suite de matrices $(A_p)_{p\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$, soit :

$$A_p = \begin{bmatrix} a_p & c_p \\ b_p & d_p \end{bmatrix} \quad (p \in \mathbf{N})$$

est convergente dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ si et seulement si les quatre suites réelles $(a_p)_{p\in\mathbf{N}}$, $(b_p)_{p\in\mathbf{N}}$, $(c_p)_{p\in\mathbf{N}}$, $(d_p)_{p\in\mathbf{N}}$ sont convergentes dans $\mathbf{R}$. En désignant par a, b, c, d, les limites respectives de ces suites, on dit alors que la suite $(A_p)_{p\in\mathbf{N}}$ converge vers L, avec : $L = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

a) Montrez que la suite $(A_p)_{p\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\forall p \in \mathbf{N}, A_p = A^p$$

est divergente.

b) Soit B une matrice quelconque de $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$. Montrez que la suite $(B_p)_{p\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\forall p \in \mathbf{N}, B_p = (1/p!)\, B^p$$

est convergente.

2°) Soit a et b deux réels quelconques.

a) Quelles sont les valeurs propres de la matrice

$$B = aA + bI$$

b) On considère la suite $(C_p)_{p\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\forall p \in \mathbf{N}, C_p = (aA + bI)^p$$

Trouvez une condition nécessaire et suffisante sur le couple (a,b) de $\mathbf{R}^2$ pour que la suite $(C_p)_{p\in\mathbf{N}}$ soit convergente.

Quelle est la nature de l'ensemble des couples (a,b) solutions du problème ?

3°) On définit la suite $(D_p)_{p\in\mathbf{N}}$ par :

$$\forall p \in \mathbf{N}, D_p = \sum_{k=0}^{p} (1/k!)\, A^k$$

Montrez que la suite $(D_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est convergente, et donnez sa limite D sous la forme :

$$D = \alpha A + \beta I$$

où α et β sont des réels à préciser.

FIN