CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE
FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

L'épreuve se compose d'un problème et d'un exercice obligatoires, totalement indépendants et représentant respectivement environ 3/4 et 1/4 de la note finale.

PROBLEME

L'étude d'intégrales impropres permet de définir, dans le cadre d'une analyse de Fourier, par plusieurs méthodes, le développement en série de deux fonctions continues par morceaux.

Remarque : Lorsque $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$ **on dira que l'intégrale impropre** $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ **converge.**

PARTIE I Etude et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ **et conséquences.**

Pour tout réel t et tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$S_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt$$

$$\Sigma_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin kt$$

1. a) Calculer, $\forall\, t$, la somme partielle $(S_n + i\,\Sigma_n)(t)$, $(i^2 = -1)$

b) En déduire alors, $S_n(t)$.

c) Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt$.

2. **a)** Démontrer que la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(t) = \dfrac{1}{2\sin\dfrac{t}{2}} - \dfrac{1}{t} & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

est continue et dérivable.

b) Montrer que sa dérivée f' est bornée sur son intervalle de définition.

3. **a)** Montrer que la fonction f et sa dérivée f' vérifient l'égalité :

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = \frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi} f'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

b) En déduire alors un majorant pour l'intégrale du premier membre de l'équation.

c) Qu'en déduit-on lorsque n tend vers $+\infty$?

4. **a)** Donner les variations de la fonction :

$$f^* : t \to \frac{\sin t}{t} \text{ sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

b) En déduire alors les inégalités :

$$\frac{2}{\pi} \leq \int_0^{\pi} \frac{2}{t^2}\sin^2\frac{t}{2}\,dt \leq \frac{\pi}{2}$$

5. **a)** Justifier pour $x > 0$ l'égalité suivante :

$$\int_0^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1-\cos x}{x} + \int_0^{x} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$$

b) Etudier ensuite la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

6. **a)** Montrer, en le justifiant avec soin, que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt$$

b) En déduire alors la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

7. a) Etudier, pour $m \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} dx$$

b) Calculer pour tout m réel :

$$A(m) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} dx$$

PARTIE II Calcul d'intégrales impropres

1. Soient a et b deux réels différents :

a) Montrer qu'il existe un réel c, tel que la fonction k définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall\, x > 0,\ \ k(x) = \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} \qquad \text{et pour } x = 0 \quad k(0) = c$$

soit continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) Donner alors la valeur de c.

2. a) Etablir la convergence de l'intégrale impropre :

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$$

b) Calculer $I(a, b)$ en fonction de $|a|$ et $|b|$.

3. a) Vérifier que pour tout couple (α, β) de réels, l'intégrale impropre :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x . \sin \beta x}{x^2} dx$$

est convergente.

b) Donner alors sa valeur $J(\alpha, \beta)$.

4. Dans la suite du problème x est un réel donné dans l'intervalle $[0, 1]$.

a) Etudier la continuité sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction g_x de la variable y définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall\, y > 0,\ g_x(y) = \frac{2}{\pi y^2}(\sin xy - x \sin y) \qquad \text{et} \qquad g_x(0) = 0$$

b) La fonction de la variable t définie par :

$$f_x(t) = \int_0^{+\infty} g_x(y) \sin ty\, dy$$

est-elle définie sur $\mathbb{R}$?

c) Donner l'éventuelle parité de $f_x(t)$.

d) Calculer la valeur de $f_x(t)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}^+$ (on distinguera avec soin : $t < x$, $t \in [x, 1]$ et $t > 1$).

5. Déterminer l'ensemble E des points $t \in \mathbb{R}^+$ où f_x est dérivable et donner pour chacun d'eux la valeur de $f_x'(t)$.

6. a) Etudier pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ la convergence de l'intégrale impropre :

$$L(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy - x \sin y}{y} . \cos ty\, dy$$

b) Calculer sa valeur.

c) Quelles remarques peut-on faire en liaison avec le 5° ?

d) Donner $\forall\, t \in \mathbb{R}^+$ la relation entre $L(x, t)$ et $f_x'(t)$.

EXERCICE

Recherche d'une solution sur R pour une équation différentielle du second ordre.

On considère l'équation différentielle :

$$(E1) \qquad 2xy'' + y' - y = 0$$

1. Supposons qu'il existe des solutions développables en série entière sous la forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

a) Donner, en le justifiant avec un très grand soin, la relation de récurrence entre les coefficients a_k pour tout k entier.

b) Préciser le rayon de convergence de la série entière.

c) Dans le cas particulier où $a_0 = 1$, donner une solution f de (E1) développable en série entière.

d) Exprimer alors la fonction f précédente à l'aide de fonctions élémentaires.

2. On pose maintenant $y(x) = z(x) f(x)$.

a) Ecrire l'équation différentielle (E2) vérifiée par $z(x)$.

b) Dans les intervalles où f ne s'annule pas et où $z'(x) \neq 0$, $x \neq 0$ donner z.

c) Exprimer alors, pour tout x réel, une solution de (E2) puis celle de (E1).