1

I)1) Puisque $e \neq 0$ et $(e, u(e))$ est liée, $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tel que $u(e) = \alpha e$. Soit $k \in [\![1,n]\!]$; comme $e_k \neq 0$ et $(e_k, u(e_k))$ est liée $\exists \alpha_k \in \mathbb{K}$ tq $u(e_k) = \alpha_k e_k$.

On a : $e = \sum_{k=1}^{n} e_k$ donc $u(e) = \sum_{k=1}^{n} u(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$

$= \alpha u(e) = \sum_{k=1}^{n} \alpha e_k$, donc : $\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \alpha) e_k = 0$

Par liberté $\alpha_k - \alpha = 0$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, donc $\alpha_k = \alpha$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, donc $\underset{(\varepsilon)}{\mathrm{mat}}(u) = \alpha I_n$ et u est bien l'homothétie de rapport α.

I 2) L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \det(Q_1 + t Q_2)$ est polynômiale en t car si on pose $Q_1 = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $Q_2 = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ on a a :

$$f(t) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \left(a_{\sigma(j)j} + t\, b_{\sigma(j)j} \right)$$

$t \mapsto a_{\sigma(j)j} + t\, b_{\sigma(j)j} = f_\sigma(t)$ est polynômiale $\forall \sigma \in S_n$

donc f est polynômiale. Si P est le polynôme associé à f on a $P \in \mathbb{R}[X]$, donc $P \in \mathbb{C}[X]$; on a $P(i) = \det(Q_1 + i Q_2) = \det(Q) \neq 0$ car Q est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; donc $P(i) \neq 0$; donc $P \neq 0$.

P possède donc un nombre fini de racines, donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $P(\lambda) \neq 0$ c'est-à-dire $Q_1 + \lambda Q_2 = Q'$ est inversible.

• Déduction : On a $A = QBQ^{-1}$ donc $AQ = QB$.

[2]

donc $A(Q_1+iQ_2)=(Q_1+iQ_2)B$ d'où :
$(AQ_1)+i(AQ_2)=(Q_1B)+i(Q_2B)$. Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient :
$AQ_1=Q_1B$ et $AQ_2=Q_2B$; donc :

$\begin{cases} AQ_1=Q_1B \\ \lambda AQ_2=\lambda Q_2B \end{cases}$ donc $AQ_1+\lambda AQ_2=Q_1B+\lambda Q_2B$

c'est-à-dire : $A(Q_1+\lambda Q_2)=(Q_1+\lambda Q_2)B$

En posant $Q'=Q_1+\lambda Q_2$ on a $Q'\in GL_n(\mathbb{R})$

donc $AQ'=Q'B$ et $Q'\in GL_n(\mathbb{R})$ donc $A=Q'BQ'^{-1}$ et $A\simeq B$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

II) 1) • Supposons que est cyclique, donc $\exists x_0\in E$ tel que $\mathcal{B}=(x_0,u(x_0),\dots,u^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Posons $e_1=x_0$, $e_2=u(x_0)$, … …, $e_n=u^{n-1}(x_0)$.

Alors : $u(e_1)=e_2,\dots,u(e_{n-1})=e_n$ et

Comme $u(e_n)\in E$ $\exists!(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{K}^n$ tq

$u(e_n)=a_0e_1+\dots+a_{n-1}e_n$; donc

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix} 0 & & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & 0 \quad 1 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & & \end{pmatrix}=C(a)$$

avec
$a=(a_0,\dots,a_{n-1})$.

3

- Réciproquement, s'il existe une base $\mathcal{B}$ tel que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(u) = C(a)$ avec $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$; alors en prenant $e_1 = x_0$; on a $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ et $\mathcal{B}$ est une base de E; donc u est cyclique.

II) 2) On a : $xI - C = \begin{bmatrix} x & & & -a_0 \\ -1 & & & \vdots \\ & \ddots & & -a_{n-2} \\ & & -1 & x-a_{n-1} \end{bmatrix}$

donc :

$$\chi_C(x) = \begin{vmatrix} x & & & -a_0 \\ -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & x-a_{n-1} \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{vmatrix} 0 & & 0 & P(x) \\ -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \end{vmatrix}$$

où $P(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ $(*)$ est obtenu par l'opération

$$L_1 \leftarrow L_1 + xL_2 + x^2 L_3 + \dots + x^{n-1} L_n.$$

En développant suivant la première ligne, on obtient :

$$\chi_C(x) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

Les coefficients $a_0, \dots, a_{n-1}$ dépendent seulement de u puisque ce sont les coefficients du polynôme caractéristique $\chi_u(x)$.

Donc C ne dépend pas de x_0.

II) 3) on a $rg(C-\lambda I_n) = n-1$ car

$$\begin{array}{c} C-\lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & & 0 & \times \\ 1 & -\lambda & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -\lambda & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & \times \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \qquad\qquad\quad \downarrow & \downarrow & \qquad & \downarrow \\ \qquad\qquad\quad C_1 & C_2 & & C_{n-1} \end{array} \end{array}$$

Les colonnes $C_1, \dots, C_{n-1}$ de $C-\lambda I_n$ sont linéairement indépendantes puisque elles sont les $(n-1)$ premières colonnes de I_n.

donc $rg(C-\lambda I_n) \geqslant n-1$. Par ailleurs la matrice $C-\lambda I_n$ n'est pas inversible car λ est valeur propre de C; donc $rg(C-\lambda I_n) \neq n$ donc $rg(C-\lambda I_n) = n-1$, par le théorème du rang $\ker((C-\lambda I_n)$ est de dimension 1.

donc : $\forall \lambda \in Sp(u)$ $E_\lambda(u)$ est une droite vectorielle.

Vecteur directeur de $E_\lambda(u)$

$$V_\lambda = \begin{pmatrix} P_1(\lambda) \\ \vdots \\ \vdots \\ P_n(\lambda) \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{array}{l} P_1(\lambda) = \lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} \dots - a_1 \\ P_2(\lambda) = \lambda^{n-2} - a_{n-1}\lambda^{n-3} \dots - a_2 \\ \vdots \\ P_{n-1}(\lambda) = \lambda - a_{n-1} \\ P_n(\lambda) = 1 \end{array}$$

Pour la preuve voir corrigé du DL

III) 1) On sait que $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\mu_u)$.
Si $(Id, u, \dots, u^{n-1})$ est libre, on a
$\dim(\mathbb{K}[u]) \geq n$, donc $\deg(\mu_u) \geq n$, or
$\deg(\mu_u) \leq \deg(\chi_u) = n$; donc $\deg(\mu_u) = n$.
or $\mu_u \mid \chi_u$ et μ_u et χ_u sont unitaires, donc
$\mu_u = \chi_u$. Donc $(i) \Rightarrow (ii)$.
Réciproquement, si $\mu_u = \chi_u$ alors :
si $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ vérifie $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k = 0$
donc $P(u) = 0$ où $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$; donc $\mu_u \mid P$
or $\deg(\mu_u) = n$ car $\mu_u = \chi_u$ donc $P = 0$, d'où
$\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ et la famille $(Id, u, \dots, u^{n-1})$
est libre. Donc $(i) \Leftrightarrow (ii)$

III) 2) $(iii) \Rightarrow (i)$
u cyclique, donc $\exists x_0 \in E$ tq $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$
est une base de E.
Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$. On a :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k = 0 \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k\right)(x_0) = 0$$

6

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$$ par liberté !

Donc la famille $(Id, u, \dots, u^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

III) 3) Supposons que $\mathbb{K}[u] = \mathcal{C}(u)$.

Démontrons que la famille $(Id, u, \dots, u^{n-1}) = \mathcal{F}_e$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

On a $\mathbb{K}[u] = \{P(u) / P \in \mathbb{K}[X]\} = \{R(u) / R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\}$ car si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $P = QM_u + R$ est la div. euclidienne de P par M_u, $\deg(R) < \deg(M_u) \leq n$ donc $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Par ailleurs :

$$P(u) = \underbrace{Q(u) \circ M_u(u)}_{0} + R(u) = R(u).$$

Ainsi la famille $\mathcal{F}_e = (Id, u, \dots, u^{n-1})$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[u]$. Or $\dim \mathbb{K}[u] = \deg(M_u) \leq n$

L'énoncé donne : $n \leq \dim \mathcal{C}(u)$; donc :

$$\dim(\mathbb{K}[u]) \leq n \leq \dim \mathcal{C}(u)$$

et $\mathbb{K}[u] = \mathcal{C}(u)$; donc $\dim \mathbb{K}[u] = n$ et la famille $\mathcal{F}_e$ comportant n vecteurs, donc $\mathcal{F}_e$ est une base de $\mathbb{K}[u]$, en particulier libre.

III) 4) a) Comme $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E et $g(x_0) \in E$,
$\exists! \, (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x_0).$$

III) 4) b) On va démontrer que $\mathbb{K}[u] = \mathcal{C}(u)$
Soit $g \in \mathcal{C}(u)$; d'après a) on a :

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x_0).$$

Démontrons que :

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k = P(u) \text{ où}$$

$P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_0 X^k$. Pour cela, il suffit de prouver que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \; g(u^k(x_0)) = P(u)(u^k(x_0))$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$; on a :
$g(u^k(x_0)) = (g \circ u^k)(x_0)$; comme g et u commutent il en est de même pour g et u^k, donc :

$$g(u^k(x_0)) = (u^k \circ g)(x_0) = u^k(P(u)(x_0))$$

donc $g(u^k(x_0)) = P(u)(u^k(x_0))$

donc $g = P(u)$ et $g \in \mathbb{K}[u]$.
Ceci termine la preuve de $\mathcal{C}(u) \subset \mathbb{K}[u]$.

 Or $\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{C}(u)$; donc $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u]$.

III.) 5) a) Par le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme de décomposition des noyaux,

on a : $$E = \bigoplus_{k=1}^{s} F_k \quad \text{avec } F_k = \ker(u - \lambda_k id)^{m_k},$$

pour tout $k \in [\![1, s]\!]$.

F_k est u-stable et si on note u_k l'endomorphisme induit à F_k par u, on a :

$$(u_k - \lambda_k id_k)^{m_k} = 0$$

où id_k est l'applic identique de F_k ;

$(u_k - \lambda_k id_k)$ est donc nilpotent ; montrons que $(u_k - \lambda id_k)^{m_k - 1} \neq 0$. Sinon on aurait $F_k = \ker(u_k - \lambda id_k)^{m_k - 1}$ et par suite $E = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} F_j + \ker(u - \lambda_k id)^{m_k - 1}$

donc on aurait $Q = (X - \lambda_k)^{m_k - 1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} (X - \lambda_j)^{m_j}$

annule u ; or le polynôme minimal de u est $\mu_u = \chi_u$ car on a (i') ⟹ (ii). Ceci est absurde

Ainsi $w_k = u_k - \lambda_k \, id_k$ est un endomorph nilpotent d'indice de nilpotence m_k.

$w_k^{m_k - 1} \neq 0 \Rightarrow \exists x_k \in F_k$ tq $w_k^{m_k-1}(x_k) \neq 0$

on a $(x_k, w(x_k), \dots, w_k^{m_k-1}(x_k)) = \mathcal{B}_k$ est libre et on a :

$$\underset{\mathcal{B}_k}{\mathrm{mat}}(w_k) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Donc :

$$u_k = \lambda_k \, id_k + w_k \quad \text{avec } (*)$$

si on prend $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_s)$, on a :

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(u) = \begin{pmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_s \end{pmatrix}$$

On a supposé (i) vraie, or (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

donc $\chi_u = \mu_u$. Si on pose :

$$\chi_u = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

alors la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

est la matrice compagnon du polynôme χ_u.

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{mat}_B(g) = C$ où B est une base de E.

g est un endomorphisme cyclique d'après I/1/

donc $(I, g, \dots, g^{n-1})$ est libre car (i) $\Rightarrow$ (ii)

En appliquant III) 5) a) $\exists$ une base B' de E tq $\mathrm{mat}_{B'}(g) = \mathrm{diag}(C_1, \dots, C_s)$ (ci-dessus)

Donc $\mathrm{mat}_{B'}(u)$ et C sont semblables et par conséquent u est cyclique.

III) 6)

Puisque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut considérer que la matrice de u est complexe et raisonner par l'endomorphisme canoniquement associé.

On trouve que $\mathrm{mat}(u)$ est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice compagnon C réelle qui est celle de χ_u (réelle car $\chi_u \in \mathbb{R}[X]$) ; donc $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Donc u est cyclique.

III) 7) On a démontré :

(i) $\Leftrightarrow$ (ii)

(iii) $\Rightarrow$ (i) (iv) $\Rightarrow$ (i)

(iii) $\Rightarrow$ (iv) (i) $\Rightarrow$ (iii)

Donc on a : (iii) $\rightarrow$ (iv) $\rightarrow$ (i) $\rightarrow$ (iii) chaîne d'implications.

Donc (i) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv)

Or (i) $\Leftrightarrow$ (ii) donc

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv)

12

IV) 1) Par Cayley-Hamilton et le lemme de décomposition des noyaux, on a :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{s} E_k$$

Comme $E_k = \ker(u - \lambda_k id)^{m_k}$ et comme u et $(u - \lambda_k id)^{m_k}$ commutent, on a E_k est u-stable.

IV) 2) Remarquons que $E_k = \ker(u - \lambda_k id)^{m_k} = \ker(u_k - \lambda_k id_k)^{m_k}$; donc $(u_k - \lambda_k id_k)^{m_k} = 0$

$d_k = \dim(E_k) \Rightarrow \chi_{u_k} = (X - \lambda_k)^{d_k}$ car λ_k est l'unique valeur propre de u_k puisque $(X - \lambda_k)^{m_k}$ annule u_k.

donc $\chi_{u_k} \mid \chi_u$; donc

$$(X - \lambda_k)^{d_k} \mid \prod_{j=1}^{s} (X - \lambda_j)^{m_j}$$

donc $(X - \lambda_k)^{d_k} \mid (X - \lambda_k)^{m_k}$ et $d_k \leq m_k$

IV)3)

Comme $d_k = \dim(E_k)$ pour tout $k \in [\![1,s]\!]$, on a : $\sum_{k=1}^{s} d_k = \dim(E)$.

Or $\dim(E) = \deg(\chi_u) = \sum_{k=1}^{s} m_k$ donc

$$\sum_{k=1}^{s} d_k = \sum_{k=1}^{s} m_k$$

Alors : $\sum_{k=1}^{s} (m_k - d_k) = 0$, or $m_k - d_k \geq 0$ pour tout $k \in [\![1,s]\!]$, donc $m_k - d_k = 0$, donc

$$\forall k \in [\![1,s]\!] \quad m_k = d_k.$$

IV)4)a) Généralement, si f est un endomorphisme de E alors :

$$(\forall i \in \mathbb{N}) \quad \ker f^i \subset \ker f^{i+1}$$

car $\forall x \in E$ $f^i(x) = 0 \Rightarrow f(f^i(x)) = 0$

$$\Rightarrow f^{i+1}(x) = 0$$

IV)4)b) Si $\dim(\ker(u - \lambda \mathrm{Id}) \cancel{\neq} 1$, on aurait $1 = \dim(N_1) \leq \dim N_2 \leq \cdots \leq \dim(N_m) = m$.

14 ~~[redacted]~~ Si $\dim N_j = \dim N_{j+1}$ pour un $j \in [\![1, m-1]\!]$ on aurait $\dim N_m = \dim N_j$ et par conséquent $m = j$ (car $\dim N_m = m$) ; ce qui n'est pas vrai car $1 \leq j \leq m-1$

$$\dim(N_j) = \dim(N_{j+1}) \text{ et } N_j \subset N_{j+1} \Rightarrow N_j = N_{j+1}$$

$$\Rightarrow N_j = N_{j+1} = \cdots = N_m$$

$\left(\text{ici } N_j = \ker(u - \lambda \mathrm{id})^j\right)$

IV) 4) c) Si les s.e.v sont des droites vectorielles alors $\forall j \in [\![1, s]\!]$, on a $\dim(\ker(u - \lambda_j \mathrm{id})) = 1$; donc d'après IV) 4) b) :

$$\ker(u - \lambda_j \mathrm{id}) \subsetneq \cdots \subsetneq \ker(u - \lambda_j \mathrm{id})^{m_j}$$

donc :

$$\ker(u - \lambda_j \mathrm{id})^{m_j - 1} \subsetneq \ker(u - \lambda_j \mathrm{id})^{m_j}$$

et par suite $(X - \lambda_j)^{m_j - 1}$ n'annule pas u_j ; donc le polynôme minimal de u est χ_u car sinon on aurait

$\exists j \in [\![1, s]\!]$ tq :

$$\ker(u - \lambda_j \, id)^{m_j} = \ker(u - \lambda_j \, id)^{m_j - 1} !$$

IV) 5) On a démontré :

Théorème :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est diagonalisable et tous les sous-espaces vectoriels propres de u sont des droites vectorielles alors u est un endomorphisme cyclique de E

En effet
$\chi_u = \mu_u$ veut dire u cyclique

V) 1) $\mathcal{E}$ est une famille libre car formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes, comme $n = \dim E$ et la famille a n vecteurs $\mathcal{E}$ est une base de E.

V) 2) On va montrer que $(e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$ est libre. Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que

16

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(e) = 0$$

$e = e_1 + \dots + e_n$, donc $u(e) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$

généralement :

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ $u^k(e) = \lambda_1^k e_1 + \dots + \lambda_n^k e_n$

Donc :

$$\begin{cases} \alpha_0 + \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_1^{n-1} \alpha_{n-1} = 0 \\ \alpha_0 + \lambda_2 \alpha_1 + \dots + \lambda_2^{n-1} \alpha_{n-1} = 0 \\ \text{- - - - -} \\ \alpha_0 + \lambda_n \alpha_1 + \dots + \lambda_n^{n-1} \alpha_{n-1} = 0 \end{cases}$$

donc $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ est une solution d'un système linéaire dont le déterminant est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & & \\ 1 & \lambda_n \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ (Vandermonde)} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)$$

$\Delta \neq 0$ car les λ_i sont 2 à 2 distincts donc on a un système de Cramer dont $(0, \dots, 0)$ est sol. c'est l'unique solution ; comme $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ est aussi une solution on a $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

Donc $(u^k(e))_{0 \leq k \leq n-1}$ est une famille libre de E donc une base car possède n vecteurs.

V) 3) Comme $(e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$ est une base de E, l'endomorphisme u est cyclique.

V) 4) On a démontré que u est cyclique ; d'après la question III.7), on a :

$$\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u] = \mathrm{Vect}\{id, u, \dots, u^{n-1}\}$$

En particulier $\dim \mathcal{C}(u) = n$

puisque $(id, u, \dots, u^{n-1})$ est libre.

VI) 1) a) Supposons que A n'est pas scalaire et soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

D'après I) 1) $\exists e \in E = \mathbb{K}^2$ tq $(e, u(e))$ libre.

Posons $e_1 = e$ et $e_2 = u(e)$ et soit $b = (e_1, e_2)$, b est une base de E et :

$$\underset{b}{\mathrm{mat}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

or $\mathrm{tr}(A) = \beta$ et $\det(A) = -\alpha$

donc A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ 1 & \tau \end{pmatrix}$

avec $\tau = \mathrm{tr}(A)$ et $\delta = \det(A)$.

VI) 1) b) Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{tr}(A) = 2$, $\det(A) = 0$

Comme A n'est pas scalaire $A \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

si $e_1 = (1, 0)$ le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a $u(e_1) = e_1 + e_2$ donc

$\boxed{18}$ la famille $(e_1, u(e_1))$ est libre

D'après VI) 1) a) ci-dessus, $\underset{(e_1,u(e_1))}{\text{mat}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

La matrice de passage de (e_1, e_2) à $(e_1, u(e_1))$

est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $A = PFP^{-1}$ où $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

VI) 1) c) Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension 2. Tout endomorphisme de E est soit une homothétie

Soit un endomorphisme cyclique.

VI) 2) a) D'après la partie V ci-dessus

u est un endomorphisme cyclique

car $3 = \dim(E)$ et u possède 3 valeurs propres 2 à 2 distinctes α, β et γ.

VI) 2) b) $\chi_A = (X-\alpha)^2(X-\beta)$

. Si $\alpha \neq \beta$, d'après les questions II.3) et IV.5) u cyclique $\Leftrightarrow \dim E_\alpha(u) = 1$

car on sait déjà que $\dim E_\beta(u) = 1$.

Cela équivaut à $rg(A-\alpha I_3)=2$.

• Si $\alpha=\beta$ $\chi_A=(X-\alpha)^3$, donc

χ_A cyclique $\Leftrightarrow \dim(E_\alpha(u))=1$

$\Leftrightarrow rg\ (A-\alpha I_3)=2$

par I.3) et IV.5) toujours.

VI) 2) c) i).

Par le lemme des noyaux et compte tenu de $(X-\alpha)\wedge(X^2-cX-b)=1$ puisque

$c^2+4b<0 \Rightarrow X^2-cX-b$ n'a pas de racine réelle donc $X-\alpha \nmid X^2-cX-b$ donc

$(X-\alpha)\wedge(X^2-cX-b)=1$.

VI) 2) c) ii)

$\alpha\in Sp(u)$, donc V_1 existe.

$\dim(\ker(u^2-cu-b\,Id))=3-\dim E_\alpha(u)=3-1=2$

donc V_2 existe.

Remarquons que $(V_2, u(V_2))$ est libre car sinon V_2 serait un vecteur propre de u et V_2 serait colinéaire à V_1, chose fausse.

$(V_1, V_2, u(V_2))$ est libre car union de deux de deux base de s.e.v supplementaires

$V = V_1 + V_2$; $u(V) = \alpha V_1 + u(V_2)$.

$u^2(V) = \alpha^2 V_1 + c\, u(V_2) + b V_2$

Donc pour $\mathcal{B} = (V_1, V_2, u(V_2))$; on a :

$$\det_{\mathcal{B}} (V, u(V), u^2(V)) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix}$$

$= -b - \alpha c + \alpha^2 = \alpha^2 - c\alpha - b \neq 0$ car $X^2 - cX - b$ est irréductible, donc $(V, u(V), u^2(V))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et u est cyclique.

VI) 3) a) On trouve $\chi_u = X(X^2 - 4)$

$$= X(X+2)(X-2)$$

χ_u est scindé à racines simples donc u est diagonalisable.

$\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$.

VI) 3) b) On trouve :

$V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = P\Delta P^{-1} \text{ et } \Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

VI) 3) c) u est un endomorphisme cyclique de E d'après la partie V, puisque χ_u est scindé à racines simples.

Si on prend $V = V_1 + V_2 + V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

alors d'après (V) la famille $(V, u(V), u^2(V))$ est une base de E

Comme $\chi_u = X^3 - 4X$, on a $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

VI) 3) d) Un sous-espace vectoriel F de E u-stable vérifie $\dim(F) \in \{0, 1, 2, 3\}$, donc soit $F = \{0\}$ soit $F = E$ soit F est un plan vectoriel soit F est une droite vectorielle.

- Une droite vectorielle $F = \mathbb{K}x$ $(x \neq 0)$ est u-stable si et seulement si x est un vecteur propre de u

Donc les seules droites u-stables sont :

$\mathbb{K}V_1$, $\mathbb{K}V_2$ et $\mathbb{K}V_3$.

22) • Si F est un plan u-stable, notons $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit à F par u.

Alors $\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$ et $\deg(\chi_{\tilde{u}}) = 2$, donc :

$$\chi_{\tilde{u}} \in \{ X(X+2), X(X-2), X^2-4 \}.$$

si $\chi_{\tilde{u}} = X(X+2)$ alors, par le lemme de décomposition des noyaux, on a :

$$F = \left(\ker(u) \oplus \ker(u+2\,Id)\right) \cap F \text{, donc}$$

$$F = \text{Vect}\{V_1, V_2\}.$$

De la même façon pour les autres cas, ce qui fournit trois plans stables

$$F_1 = \mathbb{K}V_1 + \mathbb{K}V_2,\ F_2 = \mathbb{K}V_2 + \mathbb{K}V_3,\ F_3 = \mathbb{K}V_3 + \mathbb{K}V_1.$$

c/c : Il y a 8 sous-espaces u-stables : 3 droites, 3 plans, $\{0\}$ et E.

VI) 3) e) $F = \text{Vect}\{V_1, V_2\}$; F est u-stable car parmi les plans trouvés ds la question VI)3)d).

Comme $\chi_{u_F} = (X+2)X$ est scindé à racines simples, on a u_F est cyclique (cf. (V))

De plus par (V) ; $V = V_1 + V_2$ réalise $(V, u_F(V))$ base de u_F donc $\omega = V_1 + V_2$ convient.

VI) 4) a)

On trouve $\chi_u = (X-1)^2(X+1)$.

$rg(u - Id) = 2$; donc $\dim(u - Id) = 1 < 2$

donc u n'est pas diagonalisable.

$\mu_u \in \{(X-1)(X+1), \chi_u\}$; comme

$\mu_u \neq X^2 - 1$ car sinon u serait diagonalisable

on a $\mu_u = \chi_u$

VI) 4) b) $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$.

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

VI) 4) c) Comme $\chi_u = \mu_u$, la question III) 7) permet de dire que u est cyclique.

On a $u(e_1) = e_1 + e_2 - e_3$.

$u^2(e_1) = u(e_1) + u(e_2) - u(e_3)$

$= e_1 + e_2 - e_3 + e_1 + e_2 = 2e_1 + 2e_2 - e_3$

si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$\det_{\mathcal{B}}(e_1, u(e_1), u^2(e_1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

24

donc $e = e_1$ convient.

Matrice compagnon : on a :

$\chi_u = (X^2-1)(X-1) = X^3 - X^2 - X + 1$, donc

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

VI) 4) d) Si F est u-stable, $\dim F \in \{0, 1, 2, 3\}$.

donc $F = \{0\}$ ou $\mathbb{R}^3$ ou F est une droite ou un plan.

- Droites : $\mathbb{R} v_1$ et $\mathbb{R} v_2$.
- Plans : si F est un plan u-stable alors $\chi_{u_F} \in \{(X-1)^2, X^2-1\}$.

1° cas $\chi_{u_F} = X^2 - 1$, par le lemme des noyaux $F = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$.

2° cas $\chi_{u_F} = (X-1)^2$, alors $F = \ker(u - id)^2 \cap F$

donc $F \subset \ker(u - id)^2$

or $(B - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $\ker(u - id_E)^2$ est le plan d'équation
$x - y + z = 0$.

donc $\ker(u - id_E)^2 = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Donc $F = \mathbb{R}(e_1 + e_2) + \mathbb{R}(e_2 + e_3)$.

C/C : Il y a 8 sous-espaces stables.

$\underline{\text{VI}}$) 4) e) $F = \text{Vect}\{V_1, V_2\}$ est parmi les plans trouvés ds $\underline{\text{VI}}$. 4) d).

Comme $\chi_{u_F} = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est scindé à racines simples, u_F est un endomorphisme cyclique d'après $\underline{\text{V}}$) et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

car $\chi_{u_F} = X^2 - 1$.

On a vu ds $\underline{\text{V}}$) que $V_1 + V_2 = V$ convient

$w = V_1 + V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\underline{\text{VII}}$) 1) $u^{n-1} \neq 0$; donc $\exists x_0 \in E$ $u^{n-1}(x_0) \neq 0$

La famille $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre car si $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ réalise

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x_0) = 0$$

alors $u^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x_0) \right) = 0$.

26 b) donc $\alpha_0 u^{n-1}(x_0)=0$, donc $\alpha_0 = 0$
car $u^{n-1}(x_0) \neq 0$.
supposons $\alpha_0 = \cdots = \alpha_j = 0$ $j < n-1$.
Alors : $\displaystyle\sum_{k=j+2}^{n-2} \alpha_k u^k(x_0) = 0$

En appliquant l'endomorphisme u^{n-j}, il vient : $\alpha_{j+1} u^{n-1}(x_0) = 0$, donc $\alpha_{j+1} = 0$.

Ainsi $\alpha_0 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$ et la famille $\mathcal{F}_c$ est libre, donc u est un endomorphisme cyclique.
. Comme u est nilpotent, on a $\chi_u = X^n$; donc

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice compagnon associée à u.

Comme $\ker u = E_0(u)$, $\ker(u)$ est une droite vectoriel car u est cyclique.

VII) 2) $x \in N_k \Rightarrow u^k(x) = 0$
$\Rightarrow u(u^k(x)) = u^{k+1}(x) = 0$

donc $N_k \subset N_{k+1}$;
Soit $y \in u(N_{k+1})$, donc, $\exists x \in N_{k+1}$ tq $y = u(x)$.
$u^{k+1}(x) = 0$ donc $u^k(u(x)) = 0$ donc $u^k(y) = 0$ et $y \in N_k$
donc $u(N_{k+1}) \subset N_k$.

VII) 2) b) $\varphi : N_{k+1} \longrightarrow N_k$; $x \longmapsto u(x)$.
. φ est bien définie car $u(N_{k+1}) \subset N_k$, d'après

VII) 2)a) ci-dessus.

- On a, par le théorème du rang :

(*) $\dim(N_{k+1}) = rg(\varphi) + \dim(\ker\varphi)$

Or $\ker\varphi = \{x \in N_{k+1} \,/\, u(x)=0\} = N_{k+1} \cap N_1 = N_1$

Ainsi $\dim(\ker(\varphi)) = \dim(N_1) = 1$.

$(*) \Rightarrow n_{k+1} = rg(\varphi) + 1$; or $rg(\varphi) \leq n_k$ (car $Im\varphi \subset N_k$)

donc $n_{k+1} \leq 1 + n_k$

VII) 2)c) Supposons que $n_k = n_{k+1}$. Montrons que $\forall j \geq k$, $N_j = N_k$. Par récurrence sur $j \geq k$.

- $P(k)$: On a $N_k \subset N_{k+1}$ et $\dim(N_k) = \dim(N_{k+1})$, donc $N_k = N_{k+1}$.
- Soit $j \in \mathbb{N}$, $j \geq k$ tel que $N_j = N_k$. On a $N_j \subset N_{j+1}$. Réciproquement, soit $x \in N_{j+1}$, alors $u^{j+1}(x) = 0$, donc $u^j(u(x)) = 0$, donc $u(x) \in N_j$, comme (HR) $N_j = N_k$, $u(x) \in N_k$ donc $u^k(u(x)) = 0 = u^{k+1}(x)$ donc $x \in N_{k+1}$; or $N_{k+1} = N_k$ donc $x \in N_k = N_j$;

ainsi $N_j = N_{j+1} = N_k$.

- Déduction : Montrons que $p = n$.

D'après (b) $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$ $n_{k+1} \leq 1 + n_k$

Démontrons que $\forall k \in [\![0, p]\!]$ $n_k \leq k$

On a $n_0 \leq 0$ car $n_0 = 0$

Si $n_k \leq k$ pour $k \in [\![0, p-1]\!]$ alors :

$n_{k+1} \leq 1 + n_k \leq 1+k$, donc $n_{k+1} \leq k+1$.
En particulier $n_p \leq p$; or $n_p = \dim(\ker u^p) = n$
donc $n \leq p$; or $p \leq n$ donc $p = n$.

VII) 3) On a démontré le théorème :

<u>Théorème</u> :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est nilpotent alors u est cyclique si et seulement si $\ker u$ est une droite vectorielle.

VIII) 1) a) On a $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E. Pour montrer que $u^p = \mathrm{Id}$ il suffit de prouver que

$$\forall k \in [\![0, p-1]\!] \quad u^p(u^k(x_0)) = u^k(x_0)$$

soit $k \in [\![0, p-1]\!]$; on a $u^p(u^k(x_0)) = u^k(u^p(x_0)) = u^k(x_0)$
car $u^p(x_0) = x_0$, ce qui termine la preuve.

VIII) 1) b) On a $\mathcal{E} = \{k \in \mathbb{N}^* / (x_0, u(x_0), \dots, u^{k-1}(x_0)) \text{ libre}\}$
Par définition, $\mathcal{E} \neq \emptyset$. Par ailleurs $\mathcal{E}$ est majoré car la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{k-1}(x_0))$ libre $\Rightarrow k \leq n$.
Donc $\max(\mathcal{E})$ existe.

VIII) 1) c) $\forall k \geq m$, $u^k(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, u(x_0), \dots, u^{m-1}(x_0))$
par récurrence :

- Pour $k = m$: par définition de m.
- Si $u^k(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, u(x_0), \dots, u^{m-1}(x_0))$ pour $k \in [\![m, +\infty[\![$; on a :

$u^{k+1}(x_0) \in \mathrm{Vect}(u(x_0), \dots, u^m(x_0))$

or $u^m(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, u(x_0), \dots, u^{m-1}(x_0))$ donc

$u^{k+1}(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, u(x_0), \dots, u^{m-1}(x_0))$.

- Déduction : La famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{m-1}(x_0))$ est à la fois génératrice et libre, donc c'est une base de E, donc u est cyclique. Remarquons que $n = m$ en particulier.

- Nombre de valeurs propres ≠s de u :

on a $u^n = \mathrm{Id}$, donc $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de u ; comme $X^n - 1$ est scindé à racines simples, u est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{U}_n$.

Comme les sous-espaces propres de u sont des droites vectorielles, il y a au moins n valeurs propres, donc il y en a exactement n et $\mathrm{Sp}(u) = \mathbb{U}_n = \{\omega^k / k \in [\![1, n]\!]\}$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

$\underline{\text{VIII}}$) 2) D'après $\underline{\text{VIII}}$) 1) c), le polynôme caractéristique de u est $\chi_u = X^n - 1$, donc la matrice compagnon de u est $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$U_k = \begin{pmatrix} \bar{\omega}^k \\ \bar{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \bar{\omega}^{nk} \end{pmatrix}$; alors $CU_k = \begin{pmatrix} \bar{\omega}^{nk} \\ \bar{\omega}^k \\ \vdots \\ \bar{\omega}^{(n-1)k} \end{pmatrix}$

Remarquons que

$CU_k = \bar{\omega}^{(n-1)k} U_k = \omega^k U_k$ car $\bar{\omega}^n = 1$ et $\bar{\omega}^{-1} = \omega$

30 Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a :

$$(M\bar{M})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}\overline{m_{kj}} = \sum_{k=1}^{n} \bar{\omega}^{ik}\,\omega^{kj}$$

comme $\bar{\omega} = \omega^{-1}$, on a :

$$(M\bar{M})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (\omega^k)^{(j-i)} = \sum_{k=1}^{n} (\omega^{j-i})^k.$$

1° cas si $i=j$ alors $(M\bar{M})_{i,i} = n$.

2° cas si $i \neq j$, alors

$$(M\bar{M})_{i,j} = \omega \frac{1-\Omega_{ij}^n}{1-\Omega_{ij}} \quad \text{où } \Omega_{ij} = \omega^{j-i} \neq 1$$

Or : $\Omega_{ij}^n = (\omega^{j-i})^n = (\omega^n)^{j-i} = 1$, donc $(M\bar{M})_{i,j} = 0$

Ainsi $M\bar{M} = nI$ et par suite M est inversible et

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{n}\bar{M}}.$$

VIII) 4) Remarquons que $C = M\Delta M^{-1}$ où $\Delta = \mathrm{diag}(\omega, \omega^2, \dots, \omega^n)$, et que $A = P(C)$ où $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Donc $A = M P(\Delta) M^{-1} = \frac{1}{n} M P(\Delta)\bar{M}$.

Les valeurs propres de A sont $P(\omega^k)$, $k \in [\![1,n]\!]$ où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Les vecteurs propres sont les mêmes que pour C, à savoir les droites $\mathbb{C}U_k$ pour $\lambda_k = P(\omega^k)$ où

$$U_k = \begin{pmatrix} \bar{\omega}^k \\ \vdots \\ \bar{\omega}^{nk} \end{pmatrix}.$$

FIN