

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. $f_1 = (1, 1, 1)$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0\}$.

(a) Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors $X \in F \Leftrightarrow x + y - z = 0 \Leftrightarrow z = x + y \Leftrightarrow X = (x, y, x + y) \Leftrightarrow X = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$. Si on pose $f_2 = (1, 0, 1)$ et $f_3 = (0, 1, 1)$, alors $f_2, f_3 \in F$ (somme des coordonnées vaut 1), la famille (f_2, f_3) est une famille génératrice de F , donc $F = \text{Vect}(f_2, f_3)$, de plus la famille (f_2, f_3) est libre donc c'est même une base de F , c'est conforme à la forme demandée avec $a = b = c = d = 1$.

(b) Pour montrer que la famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de prouver que $\det(\mathcal{F}) \neq 0$ (le déterminant de $\mathcal{F}$ relativement à la base canonique, on a :

$$\det(\mathcal{F}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ par l'opération élémentaire } C_1 \leftarrow C_1 - C_2, \text{ on a}$$

$$\det(\mathcal{F}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \text{ donc } \det(\mathcal{F}) \neq 0 \text{ et la famille } \mathcal{F} \text{ est bien une}$$

base de $\mathbb{R}^3$.

2. (a) On a $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$, donc

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I.$$

On a bien $A^2 - 3A + 2I = O$

(b) D'après la question précédente on a $A \times [\frac{1}{2}(3I - A)] = [\frac{1}{2}(3I - A)] \times A = I$, donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$. Après calcul, on trouve $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. (a) On a $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $\alpha = 1$.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } \beta = 2$$

(b) Les calculs précédents montrent que α et β sont des valeurs propres de A et comme elles sont associées à trois vecteurs propres indépendants ce sont les seules, donc 1 et 2 sont les valeurs propres de A .

4. (a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$. Les formules de l'effet d'un changement de base sur la matrice d'un

endomorphismes permettent de dire que $A = PDP^{-1}$ pour $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. qui sont

à déterminer, telles que $A = PDP^{-1}$.

- (b) Pour $n = 0$, on a $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = I$, donc $A^0 = PD^0P^{-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = PD^nP^{-1}$, alors $A^{n+1} = A.A^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui termine la démonstration par récurrence demandée.

Problème

Partie 1 : Préliminaires

1. Dans tout ce qui suit si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on notera $[M]_{i,j}$ le coefficient de M à la ligne i et la colonne j pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A + \lambda B) &= \sum_{k=1}^n [A + \lambda B]_{k,k} \\ &= \sum_{k=1}^n [A]_{k,k} + \lambda [B]_{k,k} \\ &= \sum_{k=1}^n [A]_{k,k} + \lambda \sum_{k=1}^n [B]_{k,k} = \text{Tr}(A) + \lambda \text{Tr}(B), \end{aligned}$$

donc Tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$.

2. $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (a) On a

$$\text{Tr}(MN) = \sum_{\ell=1}^n [MN]_{\ell,\ell} = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^n m_{\ell,k} n_{k,\ell},$$

d'après la définition de la trace et le produit de deux matrices carrées.

- (b) D'après la question précédente,

$$\text{Tr}(MN) = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^n m_{\ell,k} n_{k,\ell} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n n_{k,\ell} m_{\ell,k} = \text{Tr}(NM)$$

- (c) Si M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $N = P^{-1}MP$, donc $\text{Tr}(N) = \text{Tr}(P(P^{-1}M)) = \text{Tr}(M)$. Il en découle que $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(N)$.

3. On considère l'ensemble $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); M \text{ et diagonale et } \text{Tr}(M) = 0\}$.

- (a) On a $F \neq \emptyset$ car $O \in F$. Si $A, B \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors A et B son diagonales et $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = 0$, donc il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et $\beta_1, \dots, \beta_n$ tel que $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $B = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$, donc $A + \lambda B = \text{diag}(\alpha_1 + \lambda\beta_1, \dots, \alpha_n + \lambda\beta_n)$. Par ailleurs on a $\text{Tr}(A + \lambda B) = \text{Tr}(A) + \lambda \text{Tr}(B) = 0$, donc $A + \lambda B \in F$.

- (b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $M \in F$ alors $\exists(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $M = \sum x_k E_{k,k}$ et $\sum_{k=1}^n x_k = 0$, donc $x_n = -\sum_{k=1}^{n-1} x_k$. Alors

$$M = \sum_{k=1}^{n-1} x_k E_{k,k} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k \right) E_{n,n} = \sum_{k=1}^{n-1} x_k (E_{k,k} - E_{n,n}).$$

Il en découle que $F \subset \text{Vect}(E_{k,k} - E_{n,n})_{k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket} = F'$. Inversement $F' \subset F$ car pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $\text{Tr}(E_{k,k} - E_{n,n}) = 0$. De plus la famille $(E_{k,k} - E_{n,n})_{k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ est libre, donc c'est une base de F et $\dim(F) = n-1$.

- (c) $G = PFP^{-1} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); M = PDP^{-1} \text{ et } D \in F\}$. On voit que $G = \Phi(F)$ avec $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), X \mapsto PXP^{-1}$. On a Φ est un isomorphisme donc $\dim(G) = \dim(F)$.
4. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), X \mapsto X + (\text{Tr}(X))A$.
- (a) Si $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

$$\begin{aligned} \phi_A(X + \lambda Y) &= X + \lambda Y + \text{Tr}(X + \lambda Y)A \\ &= X + \lambda Y + [\text{Tr}(X) + \lambda \text{Tr}(Y)]A \\ &= X + \lambda Y + \text{Tr}(X)A + \lambda \text{Tr}(Y)A \\ &= X + (\text{Tr}(X))A + \lambda(Y + \text{Tr}(Y)A) \\ &= \phi_A(X) + \lambda \phi_A(Y) \end{aligned}$$

Donc ϕ_A est une application linéaire.

Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation matricielle :

$$(\star) \quad \phi_A(X) = B$$

- (b) On suppose dans cette question que $\text{Tr}(A) \neq -1$.

- Puisque M est une solution de l'équation matricielle $(\star)$, on a $\phi_A(M) = B$, donc $M + \text{Tr}(M)A = B$. Il en découle que $\text{Tr}(M + \text{Tr}(M)A) = \text{Tr}(B)$, donc par linéarité de Tr , on a $\text{Tr}(M)(1 + \text{Tr}(A)) = \text{Tr}(B)$ et comme par hypothèse $\text{Tr}(A) \neq -1$, on a $\text{Tr}(A) + 1 \neq 0$, donc $\text{Tr}(M) = \frac{\text{Tr}(B)}{\text{Tr}(A)+1}$.
- Si M est une solution de $(\star)$ alors $M = B - \text{Tr}(M)A = B - \frac{\text{Tr}(B)}{\text{Tr}(A)+1}A$. Réciproquement c'est bien une solution, donc l'unique solution de $(\star)$ est $M = B - \frac{\text{Tr}(B)}{\text{Tr}(A)+1}A$.
- La question précédente montre que ϕ_A est bijective de bijection réciproque

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad (\phi_A)^{-1}(X) = X - \frac{\text{Tr}(X)}{\text{Tr}(A) + 1}A,$$

donc ϕ_A est un automorphisme et on a même l'expression de l'automorphisme inverse de ϕ_A .

• Petite curiosité $(\phi_A)^{-1} = \phi_{\frac{-A}{1+\text{Tr}(A)}}$

- (c) On suppose maintenant que $\text{Tr}(A) = -1$.

- Si M est une solution de $(\star)$ alors $\text{Tr}(M)(1 + \text{Tr}(A)) = \text{Tr}(B)$, donc une condition nécessaire pour avoir au moins une solution est $\text{Tr}(B) = 0$, ce qui génère la discussion suivante :

- Si $\text{Tr}(B) \neq 0$ aucune solution pour $(\star)$.
 - Si $\text{Tr}(B) = 0$ alors si M est une solution de $(\star)$ alors $M = B - \lambda A$ avec $\lambda = \text{Tr}(M)$. Réciproquement si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M = B - \lambda A$ alors $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(B) - \lambda \text{Tr}(A) = \lambda$, donc $M + \text{Tr}(M)A = B$ et M est bien une solution de $(\star)$. Il en découle que l'ensemble des solutions de $(\star)$ est $B + \mathbb{R}A$ qui est la droite affine passant par B et dirigée par A . Notons que l'on a bien $A \neq 0$ car $\text{Tr}(A) = -1$.
- ii. Pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\varphi_A(X) = X + \text{Tr}(X)A$, donc

$$\text{Tr}(\phi_A(X)) = \text{Tr}(X)(1 + \text{tr}(A)) = 0,$$

car $\text{Tr}(A) = -1$, donc $(\phi_A)^2(X) = \phi_A(X) + \text{Tr}(\phi_A(X))A = \phi_A(X)$ et par suite $(\phi_A)^2 = \phi_A$ et ϕ_A est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $M \in \ker(\phi_A) \Leftrightarrow M + \text{Tr}(M)A = O$, donc si $M \in \ker(\phi_A)$ alors $M \in \mathbb{R}A$, réciproquement si $M = \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\phi_A(M) = \lambda A + \lambda \text{tr}(A)A = \lambda(1 + \text{Tr}(A))A = 0$ car $\text{Tr}(A) = -1$, donc $\ker(\phi_A) = \mathbb{R}A$.

•

• Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $M \in \text{Im}(\phi_A) \Leftrightarrow \phi_A(M) = M \Leftrightarrow \text{Tr}(M)A = O \Leftrightarrow \text{Tr}(M) = 0$, donc $\text{Im}(\phi_A) = \ker(\text{Tr})$.

• Il en découle que ϕ_A est la projection sur $\ker(\text{Tr})$ parallèlement à $\mathbb{R}A$.

Partie 2 : La valeur absolue de la trace comme étant une fonction génératrice

1. Soit q une semi-norme sur E .

- (a) On a $q(O) = q(0.O) = |0|q(O) = 0$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $q(-M) = q((-1).M) = |-1|q(M) = q(M)$.
- (b) Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $q(M) = q(M + N - N) \leq q(M + N) + q(-N)$, donc $q(M) - q(N) \leq q(M + N)$, et par symétrie des rôles on a aussi $q(N) - q(M) \leq q(N + M)$ et comme donc $|q(M) - q(N)| \leq q(M + N)$.
- (c) si $q(N) = 0$ alors pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$|q(M + N) - q(M)| = |q(M + N) - q(-M)| \leq q(M + N - M) = q(N) = 0,$$

donc $q(M + N) = q(M)$.

2. Soit $A, B \in \mathcal{E}$ alors $f(A + B) = |\text{Tr}(A + B)| = |\text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)| \leq |\text{Tr}(A)| + |\text{Tr}(B)| = f(A) + f(B)$, si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $f(\lambda A) = |\text{Tr}(\lambda A)| = |\lambda \text{Tr}(A)| = |\lambda| |\text{Tr}(A)| = |\lambda| f(A)$. Il en découle que f est une semi-norme sur $\mathcal{E}$.
3. On donne $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et on donne A et B deux matrices de E telles que,

$$A = \sum_{j=1}^n E_{1,j} + \sum_{i=2}^n E_{i,i} \quad \text{et} \quad B = \sum_{h=1}^n \alpha_h E_{h,1}$$

(a) On a

$$\begin{aligned}
AB &= \left(\sum_{j=1}^n E_{1,j} + \sum_{i=2}^n E_{i,i} \right) \times \left(\sum_{h=1}^n \alpha_h E_{h,1} \right) \\
&= \sum_{j=1}^n E_{1,j} \sum_{h=1}^n \alpha_h E_{h,1} + \sum_{i=2}^n E_{i,i} \sum_{h=1}^n \alpha_h E_{h,1} \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \alpha_h E_{1,j} E_{h,1} + \sum_{i=2}^n \sum_{h=1}^n \alpha_h E_{i,i} E_{h,1} \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \alpha_h \delta_{j,h} E_{1,1} + \sum_{i=2}^n \sum_{h=1}^n \alpha_h \delta_{i,h} E_{i,1} \\
&= \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right) E_{1,1} + \sum_{i=2}^n \alpha_i E_{i,1}.
\end{aligned}$$

(b) On a de même :

$$\begin{aligned}
BA &= \left(\sum_{h=1}^n \alpha_h E_{h,1} \right) \times \left(\sum_{j=1}^n E_{1,j} + \sum_{i=2}^n E_{i,i} \right) \\
&= \sum_{h=1}^n \alpha_h E_{h,1} \sum_{j=1}^n E_{1,j} + \sum_{h=1}^n \alpha_h E_{h,1} \sum_{i=2}^n E_{i,i} \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \alpha_h E_{h,1} E_{1,j} + \sum_{i=2}^n \sum_{h=1}^n \alpha_h E_{h,1} E_{i,i} \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \alpha_h \delta_{1,h} E_{h,j} + \sum_{i=2}^n \sum_{h=1}^n \alpha_h \delta_{1,i} E_{h,i} \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \alpha_h E_{h,j} = \sum_{h=1}^n \left(\alpha_h \sum_{j=1}^n E_{h,j} \right)
\end{aligned}$$

Explication : Dans l'avant dernière ligne on a le terme $\sum_{i=2}^n \sum_{h=1}^n \alpha_h \delta_{1,i} E_{h,i}$ qui est nul car comme $i \geq 2$, on a $\delta_{1,i} = 0$, pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

4. Soit q une semi-norme sur $\mathcal{E}$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.

On donne $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ un élément de $\mathcal{E}$.

(a) Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $i \neq j$. On a $q(E_{i,j}) = q(E_{i,j} E_{j,j})$, et comme q vérifie la propriété $(\mathcal{P})$, on a $q(E_{i,j} E_{j,j}) = q(E_{j,j} E_{i,j}) = q(\delta_{j,i} E_{j,j}) = 0$ car $\delta_{j,i} = 0$, d'où $q(E_{i,j}) = 0$.

(b) On a

$$M = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} E_{i,j} = \underbrace{\sum_{i=1}^n m_{i,i} E_{i,i}}_{M'} + \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} m_{i,j} E_{i,j}}_N.$$

Par le même principe que la question précédente on a $q(N) = q\left(\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} m_{i,j} E_{i,j}\right) = 0$
et d'après la question **II)1)c)**, on a $q(M' + N) = q(M')$, ce qui justifie

$$q(M) = q(M') = q\left(\sum_{i=1}^n m_{i,i} E_{i,i}\right).$$

- (c) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ prenons $\alpha_k = m_{k,k}$. D'après la question **II)3)b)**, on a $BA = \sum_{h=1}^n m_{h,h} \sum_{j=1}^n E_{h,j}$. D'après la question **II)4)c)** ci-dessus, on a alors $q(BA) = q\left(\sum_{i=1}^n m_{i,i} E_{i,i}\right)$.
(d) D'après la question **II)4)c)**, on a $q(M) = q\left(\sum_{i=1}^n m_{i,i} E_{i,i}\right)$, donc d'après **II)4)d)** on a $q(M) = q(BA)$, or $q(BA) = q(AB)$, donc $q(M) = q(AB)$. D'après la question **II)3)a)**, on a alors $q(M) = q\left[\left(\sum_{i=1}^n m_{i,i}\right) E_{1,1} + \sum_{i=2}^n \alpha_i E_{i,1}\right]$, or $q\left(\sum_{i=2}^n \alpha_i E_{i,1}\right) = 0$, donc

$$q(M) = q\left[\left(\sum_{i=1}^n m_{i,i}\right) E_{1,1}\right] = \sum_{i=1}^n m_{i,i} q(E_{1,1}) = q(E_{1,1}) |\operatorname{Tr}(M)| = q(E_{1,1}) f(M).$$

Si on pose $\alpha = q(E_{1,1})$, on a $q = \alpha f$

5. Dans le cas $n = 1$, si q est une semi-norme sur $\mathbb{K}$ alors pour tout $x \in K$, on a $q(x) = |x|q(1)$.
Si on pose $\alpha = q(1)$, on a bien $q = \alpha f$, en effet ici f c'est la valeur absolue (ou le module) sur $\mathbb{K}$ car pour tout $x \in \mathbb{K}$, en confondant la matrice (x) et le scalaire x , on a $\operatorname{Tr}(x) = x$.
• Remarquons qu'avec plus de détails, on a $q(1) \geq 0$, donc on a deux cas :
• Soit $q(1) = 0$, donc ce cas $q = 0$ et on a bien $q = 0f$,
• Soit $q(1) \neq 0$, dans ce cas q est une norme sur $\mathbb{K}$.
• Conclusion : Le résultat est aussi valable si $n = 1$. On peut donc affirmer que :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ les seules semi-normes q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), q(MN) = q(NM)$ sont celle de la forme $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), q(M) = \alpha |\operatorname{Tr}(M)|$ où α est un nombre réel positif ou nul.

Partie 3 : Caractérisation d'une matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ par la notion de trace

$\mathcal{O}(n)$ désigne l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^t M M = I_n$.

1. On considère une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- (a) i. Soit $U = (u_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{O}(n)$. Si pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note U_j la colonne j de U , on sait que $\|U_j\|^2 = 1 = \sum_{i=1}^n |u_{i,j}|^2$, donc pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a $|u_{i,j}| \leq 1$.
ii. Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a :

$$[DU]_{i,j} = \sum_{k=1}^n [D]_{i,k} [U]_{k,j} = \sum_{k=1}^n \lambda_i \delta_{i,k} u_{k,j} = \lambda_i u_{i,j}.$$

iii. On a $\text{Tr}(DU) = \sum_{i=1}^n [DU]_{i,i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{i,i}$. Or $u_{i,i} \leq |u_{i,i}| \leq 1$ et $\lambda_i \geq 0$, donc

$$\text{Tr}(DU) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Tr}(D).$$

(b) On donne U une matrice de $\mathcal{O}(n)$.

- i. Comme S est une matrice réelle symétrique, elle est orthogonalement diagonalisable, donc il existe une matrice $P \in \mathcal{O}(n)$ et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tel que $S = PDP^\top$. Notons que les α_k sont les valeurs propres de S , en particulier les α_k sont positifs ou nuls.
- ii. Posons $V = P^\top UP$, alors $U = PVP^\top$, or on a vu ci-dessus que $S = PDP^\top$, donc $SU = PD \underbrace{P^\top P}_{=I_n} VP^\top = P(DV)P^\top$.
- iii. Il découle de la question précédente que les matrice SU et DV sont semblables, donc $\text{Tr}(SU) = \text{Tr}(DV)$. D'après la question on a $\text{Tr}(DV) \leq \text{Tr}(D)$, or $\text{Tr}(D) = \text{Tr}(S)$, donc $\text{Tr}(SU) \leq \text{Tr}(S)$.

2. Réciproquement, soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que,

$$\forall U \in \mathcal{O}(n), \quad \text{Tr}(AU) \leq \text{Tr}(A)$$

- (a) i. Si $a = b = 0$ alors $0 = a \cos \alpha + b \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi)$ pour n'importe quelle valeur de φ .
 • Si $(a, b) \neq (0, 0)$ le nombre complexe $z = a - bi$ est non nul, soit alors θ l'argument de z , donc $z = |z|e^{i\theta} = \sqrt{a^2 + b^2}e^{i\theta}$. On a $ze^{i\alpha} = \sqrt{a^2 + b^2}e^{i(\theta+\alpha)}$, or

$$ze^{i\alpha} = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))(a - bi) = (a \cos(\alpha) + b \sin(\alpha) + i(a \sin(\alpha) - b \cos(\alpha)).$$

Par comparaison des parties réelles on a $a \cos(\alpha) + b \sin(\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha + \theta)$. Or $\cos(\alpha + \theta) = \cos(-\alpha - \theta) = \sin(\frac{\pi}{2} - (-\alpha - \theta)) = \sin(\alpha + \theta + \frac{\pi}{2}) = \sin(\alpha + \varphi)$ avec $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$

• On a donc prouvé que, pour tous réels a, b, α , il existe un réel φ tel que

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi)$$

- ii. Supposons que pour tout réel α , $a \cos \alpha + b \sin \alpha \leq a$ alors $b = 0$. Notons que le réel φ trouvé ci-dessus a pour expression $\varphi = \arg(a - bi) + \frac{\pi}{2}$, donc φ ne dépend que de a et b , il ne dépend pas de α . Ainsi la condition $a \cos \alpha + b \sin \alpha \leq a$ s'exprime $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi) \leq a$, et comme φ ne dépend pas de α , elle devient $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x) \leq a$. Si $b \neq 0$ on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) \leq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, ce qui veut dire que le réel $M = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ est un majorant de la fonction sin, par suite $M \geq 1$, donc $a \geq \sqrt{a^2 + b^2}$ donc $a^2 \geq a^2 + b^2$ donc $b = 0$, en contradiction avec $b \neq 0$, donc $b = 0$.
- (b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ pour son produit scalaire usuel. On note, pour tous entiers p et q tels que $1 \leq p < q \leq n$, $\pi_{p,q}$ le plan engendré par la famille (e_p, e_q) . On considère $u_{p,q}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que la restriction de $u_{p,q}$ sur $\pi_{p,q}$ est la rotation de l'angle α et la restriction de $u_{p,q}$ sur l'orthogonal de $\pi_{p,q}$ est l'identité.

i. D'après la définition on a

$$U_{1,2} = \begin{pmatrix} R_\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\alpha & 0_{1,n-2} \\ 0_{n-2,1} & I_{n-2} \end{pmatrix},$$

où R_α est la matrice de rotation plane $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ $U_{1,2}$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car les colonnes de $U_{1,2}$ forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, en effet si on note C_k la colonne k de $U_{1,2}$ on a $C_k = E_k$ si $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$ où E_k est la colonne k de I_n . Il en découle que $(C_k)_{3 \leq k \leq n}$ est une famille orthonormée. Pour C_1 et C_2 on a $\langle C_1, C_2 \rangle = -\cos \alpha \sin \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 0$ et $\|C_1\|^2 = \|C_2\|^2 = 1$, finalement pour tout $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$, on a $\langle C_1, C_k \rangle = \cos(\alpha).0 + \sin(\alpha).0 = 0$ de même $\langle C_2, C_k \rangle = -\sin(\alpha).0 + \cos(\alpha).0 = 0$

• Une deuxième méthode est de remarquer que $U_{1,2}^\top = \begin{pmatrix} (R_\alpha)^\top & 0_{1,n-2} \\ 0_{n-2,1} & I_{n-2} \end{pmatrix}$ puis que $(R_\alpha)^\top = (R_\alpha)^{-1}$, par suite $U_{1,2}(U_{1,2})^\top = I_n$

ii. On peut écrire la matrice A sous forme de blocs : $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, A_4 = (a_{i,j})_{3 \leq i,j \leq n}, A_2 = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 3 \leq j \leq n}}, A_3 = (a_{i,j})_{\substack{3 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq 2}}.$$

Il en découle que

$$AU_{1,2} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_\alpha & 0_{1,n-2} \\ 0_{n-2,1} & I_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 R_\alpha & A_2 \\ 0_{n-2,1} R_\alpha & A_4 \end{pmatrix},$$

donc $\text{Tr}(AU_{1,2}) = \text{Tr}(A_1 R_\alpha) + \text{Tr}(A_4)$. On a

$$A_1 R_\alpha = \begin{pmatrix} a_{1,1} \cos(\alpha) + a_{1,2} \sin(\alpha) & -a_{1,1} \sin(\alpha) + a_{1,2} \cos(\alpha) \\ a_{2,1} \cos(\alpha) + a_{2,2} \sin(\alpha) & -a_{2,1} \sin(\alpha) + a_{2,2} \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A_1 R_\alpha) &= a_{1,1} \cos(\alpha) + a_{1,2} \sin(\alpha) - a_{2,1} \sin(\alpha) + a_{2,2} \cos(\alpha) \\ &= (a_{1,1} + a_{2,2}) \cos(\alpha) + (a_{1,2} - a_{2,1}) \sin(\alpha). \end{aligned}$$

Il en découle que

$$\text{Tr}(AU_{1,2}) = (a_{1,1} + a_{2,2}) \cos(\alpha) + (a_{1,2} - a_{2,1}) \sin(\alpha) + \sum_{i=3}^n a_{i,i}$$

iii. On a $\text{Tr}(AU_{1,2}) \leq \text{Tr}(A)$ veut dire

$$(a_{1,1} + a_{2,2}) \cos(\alpha) + (a_{1,2} - a_{2,1}) \sin(\alpha) \leq a_{1,1} + a_{2,2}$$

Cette inégalité est vraie pour tout nombre réel α , donc d'après la question **III)2)a)ii** on a $a_{1,2} - a_{2,1} = 0$, donc $a_{1,2} = a_{2,1}$.

iv. Dans le cas général, la matrice $U_{p,q}$ de $u_{p,q}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ s'écrit :

$$U_{p,q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cos(\alpha) & 0 & \dots & 0 & -\sin(\alpha) \\ & & & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & & \ddots & 1 & 0 \\ & & & \sin(\alpha) & 0 & \dots & 0 & \cos(\alpha) \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

v. Pour le produit $AU_{p,q}$ les coefficients diagonaux sont pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$[AU_{p,q}]_{i,i} = \begin{cases} a_{i,i} & \text{si } i \notin \{p, q\} \\ a_{p,p} \cos(\alpha) + a_{q,p} \sin(\alpha) & \text{si } i = p \\ -a_{q,p} \sin(\alpha) + a_{q,q} \cos(\alpha) & \text{si } i = q \end{cases}.$$

Il en découle que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AU_{p,q}) &= a_{p,p} \cos(\alpha) + a_{q,p} \sin(\alpha) - a_{q,p} \sin(\alpha) + a_{q,q} \cos(\alpha) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p \\ i \neq q}}^n a_{i,i} \\ &= (a_{p,p} + a_{q,q}) \cos(\alpha) + (a_{p,q} - a_{q,p}) \sin(\alpha). \end{aligned}$$

vi. Comme la matrice $U_{p,q}$ est orthogonale, car comme dans le cas particulier $(p, q) = (1, 2)$ les colonnes C_k de $U_{p,q}$ réalisent $C_k = E_k$ si $k \neq p$ et $k \neq q$, donc $(C_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{p, q\}}$ est une famille orthonormée, ensuite on traite les colonnes C_p et C_q comme on avait fait dans le cas particulier. On trouve aisément que $\langle C_p, C_q \rangle = 0$ et $\|C_p\|^2 = \|C_q\|^2 = 1$ et que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{p, q\}$, on a $\langle C_i, C_p \rangle = \langle C_i, C_q \rangle = 0$

Il en découle que l'on a $\text{Tr}(AU_{p,q}) \leq \text{Tr}(A)$, veut dire

$$(a_{p,p} + a_{q,q}) \cos(\alpha) + (a_{p,q} - a_{q,p}) \sin(\alpha) \leq a_{p,p} + a_{q,q}$$

Cette inégalité est vraie pour tout nombre réel α , donc d'après la question **III)2)a)ii** on a $a_{p,q} - a_{q,p} = 0$, donc $a_{p,q} = a_{q,p}$.

Ainsi on a démontré que pour tout couple $(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, tel que $p \neq q$, on a $a_{p,q} = a_{q,p}$, ce qui veut dire que la matrice A est symétrique.

- (c) i. Dans cette question on entend par g l'endomorphisme canoniquement associé à A que g est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que la matrice de g relativement à $\mathcal{B}$ est égale à A . Puisque A est une matrice réelle symétrique, et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et A représente g dans $\mathcal{B}$, l'endomorphisme g est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. D'après le théorème spectral, g est diagonalisable dans une

base orthonormée, ce qui veut dire exactement qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de g .

Pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, on note γ_i la valeur propre de g associée à v_i , donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g(v_i) = \gamma_i v_i$.

- ii. Soit j un entier tel que $1 \leq j \leq n$. On considère l'endomorphisme w_j de $\mathbb{R}^n$ défini par $w_j(v_j) = -v_j$ et pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$ et $k \neq j$, $w_j(v_k) = v_k$. Soit W_j la matrice de w_j relativement à la base $\mathcal{B}$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $w_j(v_i) = \varepsilon_i v_i$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$, donc w_j transforme la base orthonormée (v_i) en la base orthonormée $(\varepsilon_i v_i)$, donc sa matrice W_j relativement à la base orthonormée $\mathcal{B}$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• On sait que $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(g)$ et si on note $\Delta = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ alors $\Delta = \text{mat}_{\mathcal{V}}(g)$.

Notons P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{V}$ alors $A = P\Delta P^\top$.

• Par définition de w_j , on a la matrice de w_j relativement à $\mathcal{V}$ est

$$W'_j = \text{mat}_{\mathcal{V}}(w_j) = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \quad \text{avec} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varepsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \neq j \\ - & \text{si } k = j \end{cases}.$$

Alors $W_j = PW'_j P^\top$. Il en découle que $AW_j = P\Delta P^\top PW'_j P^\top = P\Delta W'_j P^\top$ donc AW_j est semblable à $\Delta W'_j = \text{diag}(\varepsilon_k \gamma_k)_{1 \leq k \leq n}$, donc

$$\text{Tr}(AW_j) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \gamma_k = -\gamma_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \gamma_k = -2\gamma_j + \sum_{k=1}^n \gamma_k = \text{Tr}(A) - 2\gamma_j$$

La matrice W_j est orthogonale, donc $\text{Tr}(AW_j) \leq \text{Tr}(A)$, donc $\text{Tr}(A) - \text{Tr}(AW_j) \geq 0$, or $\text{Tr}(A) - \text{Tr}(AW_j) = 2\gamma_j$, donc $\gamma_j \geq 0$.

- (d) On a démontré que A est symétrique et toutes les valeurs propres γ_j de A sont positives ou nulles. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $X = \sum_{k=1}^n x_k v_k$, alors $AX = \sum_{k=1}^n x_k A v_k = \sum_{k=1}^n \gamma_k x_k v_k$, donc $X^\top AX = \langle AX, X \rangle = \sum_{k=1}^n \gamma_k x_k^2$ et par suite $\forall X \in \mathbb{R}^n, X^\top AX \geq 0$, donc $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.