1 Partie I

1. On a $\det(A) = ad - bc \in \mathbb{Z}$. Si A est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, d'inverse A^{-1}, on a alors $\det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$. Comme $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ on a alors $\det(A)|1$, donc $\det(A) \in \{1, -1\}$. On sait alors que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. Réciproquement, si $\det(A) \in \{-1, 1\}$ alors A est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et la formule donnant A^{-1} montre que A^{-1} , compte tenu de $\det(A) = \pm 1$, est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
Conclusion : $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$, auquel cas, on a $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$
2. $E = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) / \exists p \in \mathbb{N}^* / A^p = I_2\}$
a. Soit $A \in E$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$, donc $AA^{p-1} = A^{p-1}A = I_2$, comme $A^{p-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, la matrice A est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ et $A^{-1} = A^{p-1}$
b. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $A - zI_2$ est non inversible. D'après la question 3) du préliminaire, il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ tel que $X \neq 0$ et $AX = zX$. Il est aisé de voir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k X = z^k X$ (simple récurrence), donc $A^p X = z^p X$. Comme $A^p = I_2$, il vient : $X = z^p X$, donc $(z^p - 1)X = 0$ donc $z^p - 1 = 0$ (car $X \neq 0$). Ainsi $z^p = 1$, donc $z \in \mathbb{U}_p$. En particulier, $|z| = 1$.
c. Soit $M \in E$. Le polynôme χ_M est donné par : $\chi_M = X^2 - \operatorname{tr}(A) + \det(A)$. Si z est une racine complexe de χ_M, alors $\det(M - zI_2) = 0$, donc d'après le b) ci-dessus, $|z| = 1$. Deux cas sont possibles :
• Les racines de χ_M sont réelles, donc elles valent 1 où -1, ce qui donne

$$\chi_M \in \{(X-1)^2, (X+1)^2, X^2 - 1\}$$

• Une racine z au moins de χ_M n'est pas réelle. Il en découle que la seconde est $\overline{z}$ car $\chi_M \in \mathbb{R}[X]$, donc, en posant $z = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R} \backslash \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$, on a :

$$\chi_M = (X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - (2\cos\theta)X + 1$$

Comme χ_M est à coéfficients dans $\mathbb{Z}$(à savoir : $1, -\operatorname{tr}(A), \det(A)$), on a forcément $2\cos\theta \in \mathbb{Z} \cap [-2, 2] = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, et comme $\theta \not\equiv 0 \;\; [\pi]$, il reste $2\cos\theta \in \{-1, 0, 1\}$, ce qui donne :

$$\chi_M \in \{X^2 + X + 1, X^2 + 1, X^2 - X + 1\}$$

Conclusion :

$$\forall M \in E, \quad \chi_M \in \{(X-1)^2, (X+1)^2, X^2 - 1, X^2 + X + 1, X^2 - X + 1, X^2 + 1\}$$

Donc $\{\chi_M / M \in E\}$ est fini de cardinal au plus égal à 6.
d. Cette question est à réctifier comme suit :
Montrer qu' il existe des complexes λ_1, λ_2 de module 1 et (X_1, X_2) base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ tel que $\forall k \in \{1, 2\}, AX_k = \lambda_k X_k$ et que λ_1 et λ_2 sont conjugués si A n'est pas semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Comme $A \in E$ deux cas sont possibles :
• Soit χ_A admet une racine non réelle λ. L'autre racine est $\overline{\lambda}$. Posons $\lambda_1 = \lambda$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda}$.
Soit $k \in \{1, 2\}$. On a $\det(A - \lambda_k I_2) = 0$, donc la matrices $A - \lambda_k I_2$ est non inversible, par suite il existe $X_k \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ tel que $X_k \neq 0$ et $AX_k = \lambda_k X_k$. La famille (X_1, X_2) est libre car si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0$ alors on a en composant par A : $\begin{cases} \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0 \\ \lambda_1 \alpha_1 X_1 + \alpha_2 \lambda_2 X_2 = 0 \end{cases}$,

donc : $\begin{cases} \lambda_2\alpha_1 X_1 + \lambda_2\alpha_2 X_2 = 0 \\ \lambda_1\alpha_1 X_1 + \alpha_2\lambda_2 X_2 = 0 \end{cases}$ et par suite $(\lambda_2 - \lambda_1)\alpha_1 X_1 = 0$ et alors $\alpha_1 = 0$ puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (on a supposé λ non réel) et $X_1 \neq 0$. On a ainsi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, donc la famille (X_1, X_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ car famille libre à deux vecteurs en dimension 2.

• Soit χ_A n'a que des racines réelles, alors soit ces deux recines sont distinctes , elles valeuts forcément 1 et -1. Comme les matrices $A + I_2$ et $A - I_2$ sont non inversibles on dispose de X_1, X_2 vecteurs non nuls de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX_1 = X_1$ et $AX_2 = -X_2$. L famille (X_1, X_2) est libre (même démarche que ci-dessus). et on termine.

Soit ces deux racines réelles sont égales : triatons le cas $\chi_A = (X - 1)^2$. Comme $A - I_2$ n'est pas inversibles il existe $Y_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ tel que $Y_2 \neq 0$ et $AY_1 = Y_1$. Complétons en une base $\mathscr{Y} = (Y_1, Y_2)$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$, alors si u est l'endomorphisme canoniquement associé à A on a $A' = \operatorname{mat}_{\mathscr{Y}} u = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Comme A et A' sont semblables on a $\chi_A = \chi_{A'}$, donc $(X-1)^2 = (X-1)(X-\beta)$ et par suite $\beta = 1$. Donc $A' = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On va prouver que $\alpha = 0$, ce qui signifie que $A = I_2$. On a $A'Y_1 = Y_1$ et $A'Y_2 = \alpha Y_1 + Y_2$. Une récurrence simple permet de voir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, A'^k Y_2 = k\alpha Y_1 + Y_2$; en particulier pour $k = p$, on obtient $Y_2 = \alpha p Y_1 + Y_2$ donc $\alpha p Y_1 = 0$ et $\alpha = 0$. Ainsi $A' = I_2$ et comme A est semblable à A', on a aussi $A = I_2$, donc si (X_1, X_2) est une base quelconque de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ elle convient.

Si $\chi_A = (X + 1)^2$, remarquons que $\chi_{-A}(x) = \det(xI_2 + A) = \det(-xI_2 - A) = \chi_A(-x)$. Donc $\chi_{-A}(X) = (-X + 1)^2 = (X - 1)^2$. L'étude prcécdente donne l'existence de (X_1, X_2) base tel que $(-A)X_1 = X_1$ et $(-A)X_2 = X_2$,, donc $A(X_1) = -X_1$ et $AX_2 = -X_2$

e. Soit $M \in E$ et notons $\mathscr{N}_M = \{k \in \mathbb{N}^* / A^k = I_2\}$. Comme $M \in E$ on a $\mathscr{N}_M \neq \emptyset$. $\mathscr{N}_M$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$, donc admet un plus petit élément ν_M. On reconnaît l'ordre de la matrice M dans le groupe des inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Il en découle que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad M^k = I_2 \Leftrightarrow \nu_M | k$$

f. Soit $M \in E$. D'aprés la question 2)d) ci-dessus, M est sembalable à une matrice $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ ou λ_1 et λ_2 complexes conjugués de module 1. Dans le premier cas, on a $M^2 = I_2$ et $M \neq I_2$, donc $\nu_M = 2$. Dans le second cas on vu les cas suivants :

- Cas où $M = I_2$, alors $\nu_M = 1$.
- Cas où $M = -I_2$, alors $\nu_M = 2$.
- Cas où $M \simeq M' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$ avec $\lambda = e^{i\theta}$ et $2\cos\theta = 1$ auquel cas, on avait trouvé que $\chi_M = X^2 - X + 1$, donc $\lambda = -j = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et par suite $\nu_M = 6$
- Cas où $M \simeq M' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$ avec $\lambda = e^{i\theta}$ et $2\cos\theta = 1$ auquel cas, on avait trouvé que $\chi_M = X^2 + X + 1$, donc $\lambda = j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et par suite $\nu_M = 3$; - Cas où $M \simeq M' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$ avec $\lambda = i$, donc $\nu_M = 4$.

Notons que dans chacun des cas il existe un polynôme de la forme $X^2 - uX - v$ qui annule M.
On déduit de cette étude que les valeurs possibles des ν_M, quand M décrit E, sont $1, 2, 3, 4$ et 6.
En nous inspirant de la question 4) du préliminaire on obtient un exemple illustant tous les cas discutés en prenant $M = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & v \end{pmatrix}$ Ainsi , le tableau suivnant résume la liste des exemples proposés :

ν_M	χ_M	M	Variante simple
1	$(X-1)^2$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	I_2
2	$(X+1)^2$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	$-I_2$
3	X^2+X+1	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	
4	X^2+1	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	
6	X^2-X+1	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	

3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ tel que $A^2 - A + I_2 = 0$
a. C'est déjà donné ci-dessus , $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (en vertu de la question 4) du préliminaire.)
b. On a $A \in E$ car $A^6 = I_2$ et on a déjà vu que $\nu_A = 6$.
c. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $A^p = \alpha_p A + \beta_p I_2$.
On a $A^{p+1} = \alpha_{p+1}A + \beta_{p+1}I_2 = \alpha_p A^2 + \beta_p A = \alpha_p(A - I_2) + \beta_p A = (\alpha_p + \beta_p)A - \alpha_p I_2$
Comme la famille (A, I_2) est libre, il en découle :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \alpha_{p+1} = \alpha_p + \beta_p \\ \beta_{p+1} = -\alpha_p \end{cases}$$

Il en résulte que la suite (α_p) satisfait la relation de récurrence :

$$\alpha_{p+2} - \alpha_{p+1} + \alpha_p = 0$$

On reconnait une suite récurrente linéaire dont l'équation cractéristique est

$$t^2 - t + 1 = 0$$

laquelle admet la racine complexe non réelle $-j = e^{-\frac{\pi}{3}}$, donc

$$\alpha_p = \alpha \cos\left(\frac{p\pi}{3}\right) + \beta \sin\left(\frac{p\pi}{3}\right)$$

On a $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1, \beta_0 = 1, \beta_1 = 0$, donc $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \frac{1}{2}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta = 1 \end{cases}$, soit : $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ On obtient, compte tenu de $\beta_{p+1} = -\alpha_p$:

$$(\forall p \in \mathbb{N}) \quad \begin{cases} \alpha_p = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \sin\left(\dfrac{p\pi}{3}\right) \\ \beta_p = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \sin\left(\dfrac{(p-1)\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Notons que la formule donnant β_p est valable même pour $p = 0$.
4. n entier naturel non nul et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ tel que $A^2 - A + I_n = 0$.
a. Supposons que n est impair, le polynôme caractéristique χ_A de A est de degré n, donc il est de degré impair, la fonction $t \mapsto \chi_A(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et réalise $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermediaries il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = 0$, par suite t_0 est une valeur propre de A et comme $A^2 - A + I_n = 0$ on a $X^2 - X + 1$ est un polynôme

annulateur de A, donc $t_0^2 - t_0 + 1 = 0$, chose impossible car l'équation $t^2 - t + 1 = 0$ n'a auncune solution réelle. Il en découle que n est pair.
b. On sait que $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $U^2 - U + I_2 = 0$, donc si on pose $n = 2m$, la matrice à m blocs

$$A = \mathrm{diag}(A_1, \cdots, A_m) = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_m \end{pmatrix}$$

avec $\forall k \in [\![1, m]\!], A_k = U$ vérifie $A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et $A^2 - A + I_{2m} = 0$.

2 Partie II

1. $\Phi_A(P) = P(A)$, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.
a. Montrons que Φ_A est un morphisme d'algèbres :
• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Posons $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$. Soit $N = \max(p, q)$; alors : $P + \lambda Q = \sum_{k=0} (a_k + b_k) X^k$ avec la convention $a_k = 0$ si $k > p$ et $b_k = 0$ si $k > q$. On a alors $\Phi_A(P + \lambda Q) = \sum_{k=0}^{N} (a_k + \lambda b_k) A^k = \sum_{k=0}^{N} a_k A^k + \lambda \sum_{k=0}^{N} b_k A^k$ et compte tenu de la convention, $\Phi_A(P + \lambda Q) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k + \lambda \sum_{k=0}^{q} b_k A^k = \Phi_A(P) + \lambda \Phi_A(Q)$.
• Soit $j \in \mathbb{N}$ et $Q = \sum_{k=1}^{q} b_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, alors :

$$\begin{aligned} \Phi_A(X^j Q) &= \Phi\left(\sum_{k=1}^{q} b_k X^{j+k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{q} b_k A^{j+k} \\ &= \sum_{k=1}^{q} b_k A^j A^k \\ &= A^j \sum_{k=1}^{q} b_k A^k \\ &= A^j \Phi_A(Q) \end{aligned}$$

Si $P=\sum_{k=1}^{p} a_j X^j \in \mathbb{R}[X]$ alors :

$$\begin{aligned}
\Phi_A(PQ) &= \Phi_A(\sum_{k=1}^{p} a_j X^j Q) \\
&= \sum a_j \Phi_A(X^j Q) \\
&= \sum_{k=1}^{p} a_j A^j \Phi_A(Q) \\
&= (\sum_{k=1}^{p} a_j A^j)\Phi_A(Q) \\
&= \Phi_A(P)\Phi_A(Q).
\end{aligned}$$

• Finalement, $\Phi_A(1)=\mathrm{Id}_E$
Ceci prouve que Φ_A est un morphismes d'algèbres.
2.
a. Si $a_0=a_1=0$, alors $P(A)=0$. Réciproquement, si $P(A)=0$ alors $a_0 I_N + a_1 A = 0$. Supposons que $a_1 \neq 0$, alors $A = cI_n$, avec $c=-\dfrac{a_0}{a_1}$. Comme $A^2-A+I_n=0$, on a $(c^2-c+1)A=0$, et comme $A\neq 0$, il vient $c^2-c+1=0$, ce qui est impossible car $c\in\mathbb{R}$ et le trinôme X^2-X+1 n'au aucune racine réelle. Ainsi $a_1=0$ et par suite $a_0 I_n=0$, donc $a_0=0$.
Conclusion $P(A)=0 \Leftrightarrow a_0=a_1=0$.
b. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. La division euclidienne de P par X^2-X+1 s'écrit :

$$P=Q(X^2-X+1)+R$$

avec $R\in\mathbb{R}_1[X]$, il en découle que $P(A)=R(A)$. Si R_1 et R_2 sont deux solutions du probléme alors $R_2-R_1\in\mathbb{R}_1[X]$ et $(R_2-R_1)(A)=0$. Compte tenu du a), en posant $R_2-R_1=\alpha_0+\alpha_1 X$ ci-dessus, on a $R_2-R_1=0$, donc $R_1=R_2$. D'où l'existence et l'unicité de R tel que $P(A)=R(A)$ et $R\in\mathbb{R}_1[X]$.
Noyau de Φ_A : Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ et R le reste de la division euclidienne de P par X^2-X+1. On a $P\in\ker\Phi_A$ ssi $R(A)=0$ ssi $R=0$ ssi $(X^2-X+1)|P$. Il en découle que $\ker\Phi_A=(X^2-X+1)\mathbb{R}[X]$.
3. On a $\operatorname{Im}\Phi_A=\{aI_n+bA/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$. On sait déjà que $\operatorname{Im}\Phi_A$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc un sous-anneau, en particulier. Soit $M=aI_n+bA\in\operatorname{Im}\Phi_A$ tel que $M\neq 0$ (donc $(a,b)\neq(0,0)$). Montrons que M est inversible. Si $b=0$ alors $M=aI_n$ et alors $a\neq 0$, On a $M'=\dfrac{1}{a}I_n\in\operatorname{Im}\Phi_A$ et $MM'=M'M=I_n$, donc M est inversible. Si $b\neq 0$, alors $A=-\dfrac{1}{b}(M-aI_n)=cM+dI_n$ avec $c=-\dfrac{1}{b}$ et $d=\dfrac{a}{b}$. De $A^2-A+I_n=0$, on déduit : $c^2M^2+2cdM+d^2I_n=0$ donc $M(c^2M+2cdI_n)=-d^2I_n$. Si $a\neq 0$ alors $M'=-\dfrac{c^2}{d^2}M-\dfrac{2c}{d^2}I_n$ est dans $\operatorname{Im}\Phi_A$ et $MM'=M'M=I_n$. Si $a=0$ alors comme $M=bA$ et $M\neq 0$, on a $b\neq 0$. De $A^2-A+I_n=0$, on déduit $bA(A-I_n)=-bI_2$. En posant $M'=\dfrac{1}{b}(I_n-A)$, on a $MM'=M'M=I_n$.
Conclusion : $(\operatorname{Im}\Phi_A,+,\times)$ est un corps commutatif.

3 Partie III

1. $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ tel que $A^2-A+I_2=0$.

a. Puisque les sous suites (A^{6p}) et (A^{6p+1}) convergent vers I_2 et A repsectivement et que $A \neq I_2$, la suite (A^p) est divergente.

b. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, posons $B^p = \begin{pmatrix} a_p & c_p \\ b_p & d_p \end{pmatrix}$ et $M_p = \max(|a_p|, |b_p|, |c_p|, |d_p|)$. On va démontrer par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad M_p \leq (2M_1)^p$$

Pour $p = 1$, c'est vrai car $M_1 \leq 2M_1$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M_p \leq (2M_1)^p$. On a $a_{p+1} = a_p a_1 + c_p b_1$, donc $|a_{p+1}|$.

Par hypothèse de récurrence, on a $\begin{cases} |a_p| \leq (2M_1)^p \\ |c_p| \leq (2M_1)^p \end{cases}$ et, on a , par définition de M_1 : $\begin{cases} |a_1| \leq M_1 \\ |b_1| \leq M_1 \end{cases}$, donc :

$$|a_{p+1}| \leq |a_p||a_1| + |c_p||b_1| \leq M_1(2M_1)^p + M_1(2M_1)^p = 2M_1(2M_1)^p = (2M_1)^{p+1}$$

Par le même principe, on démontre les inégalités simillaires pour les autres coefficients de B^{p+1}. Ainsi si on pose

$$a'_p = \frac{a_p}{p!}, b'_p = \frac{b_p}{p!}, c'_p = \frac{c_p}{p!}, d'_p = \frac{d_p}{p!}$$

et $M'_p = \max(|a'_p|, |b'_p|, |c'_p|, |d'_p|)$, on a $M'_p \leq \dfrac{(2M_1)^p}{p!}$. Comme la série $\sum \dfrac{(2M_1)^p}{p!}$ est convergente, son terme général tends vers 0 ; donc : $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{B^p}{p!} = 0$.

2. $a, b \in \mathbb{R}$ et $B = aA + bI_2$.

a. On sait que A est semblable à la matrice $\operatorname{diag}(-j, -\overline{j})$. Donc $aA + bI_2$ et semblable à $D = \operatorname{diag}(\mu, \overline{\mu})$ où $\mu = -aj + b$

b. Ecrivons $B = P \operatorname{diag}(\mu, \overline{\mu}) P^{-1}$ avec $P \in GL_2(\mathbb{R})$. On a $C_p = P \operatorname{diag}(\mu^p, \overline{\mu}^p) P^{-1}$. Ainsi la suite (C_p) et convergente si et seulement si la suite complexe (μ^p) est convergente. On sait que cela équivaut à $\mu = 1$ ou $|\mu| < 1$.

On a $\mu = -aj + b = \left(\dfrac{1}{2}a + b\right) - i\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, donc $\mu = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$ et

$$|\mu| < 1 \Leftrightarrow |\mu|^2 < 1 \Leftrightarrow \frac{3a^2}{2} + \left(\frac{1}{2}a + b\right)^2 < 1.$$

Donc, la suite (C_p) est convergente si et seulement si

$$|\mu| < 1 \Leftrightarrow |\mu|^2 < 1 \Leftrightarrow \frac{3a^2}{2} + \left(\frac{1}{2}a + b\right)^2 < 1 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

L'ensemble des couples (a, b) favorables est représenté par le domaine ouvert intérieur d'une ellipse union un point de la frontière de cette ellipse.

3. $D_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}(\alpha_k A + \beta_k I_2)$ avec :$(\forall k \in \mathbb{N})$ $\begin{cases} \alpha_k = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \sin\left(\dfrac{k\pi}{3}\right) \\ \beta_k = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \sin\left(\dfrac{(k-1)\pi}{3}\right) \end{cases}$.

Puisque les séries numériques $\sum \dfrac{\alpha_k}{k!}$ et $\sum \dfrac{\beta_k}{k!}$ sont convergentes (en effet les suites (α_k) et (β_k) sont bornées et on sait que la série $\sum \dfrac{1}{k!}$ est convergente de somme e.), on a la suite (D_n) est convergente de limite $D = \alpha A + \beta I_2$ avec $\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!}$ et $\beta = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{k!}$