Corrigé du problème

Partie I.

1. a) Soit $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$. On a alors :

$$\begin{aligned} S_n(t) + iC_n(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} e^{ikt} \\ &= \frac{1}{2} + e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}} = \frac{1}{2} + e^{i(n+1)t/2}\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \end{aligned}$$

Si $t \in 2\pi\mathbb{Z},\ S_n(t) + iC_n(t) = n + \frac{1}{2}$.

b) Ainsi, si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \frac{1}{2} + \cos(n+1)t/2\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \\ &= \frac{\sin(n+1/2)t - \sin(t/2) + \sin(t/2)}{2\sin(t/2)} = \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} \end{aligned}$$

Si $t \in 2\pi\mathbb{Z},\ S_n(t) = n + \frac{1}{2}$.

c) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}$ est continue sur $]0,\pi]$ et se prolonge par continuité en 0 par $(n+1/2)$ (avec un développement limité immédiat). La fonction $t \mapsto S_n(t)$ est donc continue sur $[0,\pi]$, et :

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}dt = \int_0^\pi S_n(t)dt = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \cos(kt)dt = \frac{\pi}{2}$$

2. a) et b). La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{2\sin(t/2)} - \dfrac{1}{t}$ est de classe C^∞ sur $]0,\pi]$. Au voisinage de 0 :

$$f(t) \sim \frac{t}{24}$$

La fonction f se prolonge donc par continuité en 0 avec $f(0) = 0$. De plus, pour $t \in]0,\pi]$:

$$f'(t) = -\frac{\cos(t/2)}{4\sin^2(t/2)} + \frac{1}{t^2}$$

qui est équivalent au voisinage de 0 à 1/24.

La fonction f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$. La fonction f' est donc bornée sur $[0,\pi]$.

3. a) La fonction f étant de classe C^1 sur $[0,\pi]$, on utilise une intégration par parties pour obtenir :

$$\int_0^\pi f(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt = \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(t)\cos(n+\frac{1}{2})tdt$$

b) Ainsi :

$$\left|\int_0^\pi f(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt\right| \le \frac{2\pi}{2n+1}\sup_{t\in[0,\pi]}|f'(t)|$$

c) Et donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt = 0$$

4. La fonction $f^\star$ est de classe C^∞ sur $]0,\pi/2]$. Pour tout $t\in]0,\pi/2]$:

$$(f^\star)'(t) = \frac{\cos t}{t^2}(t-\tan t)$$

On obtient immédiatement que cette dérivée reste négative sur $]0,\pi/2]$. La fonction $f^\star$ est donc décroissante sur cet intervalle de 1 à $2/\pi$. De plus $f^\star$ ademt un prolongement par continuité en 0 avec $f^\star(0) = 1$.
b) On a :

$$\int_0^{\pi} \frac{2}{t^2}\sin^2\frac{t}{2}dt = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 u}{u^2}du$$

L'étude des variations de $f^\star$ permet d'écrire :

$$\frac{2}{\pi} \leq \int_0^{\pi}\frac{2}{t^2}\sin^2\frac{t}{2}dt \leq \frac{\pi}{2}$$

5. a) L'égalité

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = \frac{1-\cos x}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt$$

valable pour $x>0$ s'obtient par une intégration par parties en prenant $x\mapsto 1-\cos x$ comme primitive de $x\mapsto \sin x$.
b) La fonction $x\mapsto \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et majorée en module sur $[1,+\infty[$ par $x\mapsto \dfrac{2}{x^2}$. Cette fonction est donc sommable sur $\mathbb{R}^+$. De plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{x} = 0$. Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt \text{ existe}$$

6. a) Un changement de variable évident donne :

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)t}{t}dt = \int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin u}{u}du$$

et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ existe, il vient :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin t}{t}dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)t}{t}dt$$

b) On écrit :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = -\int_0^{\pi}\sin(n+1/2)tf(t)dt + \int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}dt$$

et on utilise les questions 1.c) et 3.c) pour obtenir :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

7. a) b) La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin mx}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $X > 0$:

$$\int_0^X \frac{\sin mx}{x} dx = \int_0^{mX} \frac{\sin t}{t} dt$$

- si $m > 0$,

$$\lim_{X \to +\infty} \int_0^{mX} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

- si $m < 0$, la fonction $x \mapsto \sin mx$ étant impaire, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} dx = -\frac{\pi}{2}$
- si $m = 0$, il vient $A(0) = 0$.

Partie II.

1. a) et b) La fonction $x \mapsto \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Au voisinage de 0, on a :

$$\frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} \sim \frac{b^2 - a^2}{2}$$

En posant $k(0) = c = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$, la fonction k est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. a) La fonction k est continue sur $\mathbb{R}^+$ et pour $x \geq 1$, $|k(x)| \leq \dfrac{2}{x^2}$. Ceci entraîne la convergence de l'intégrale $I(a, b)$.
b) On a vu (I. 7) que, pour $m \neq 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{1}{m} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(mx)}{x^2} dx$$

donc

$$-a \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx + b \int_0^{+\infty} \frac{\sin(bx)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}$$

Donc :

$$I(a, b) = \frac{\pi}{2}(|b| - |a|), a \neq 0, b \neq 0$$

$$I(a, 0) = -|a|\frac{\pi}{2}, \quad I(0, b) = |b|\frac{\pi}{2}$$

3. a) b) En éliminant les cas triviaux où l'un des deux réels α ou β est nul, il vient :

$$\sin(\alpha x)\sin(\beta x) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{(\alpha - \beta)x}{2} - \cos\frac{(\alpha + \beta)x}{2}\right)$$

ce qui donne $J(\alpha,\beta) = \dfrac{1}{2} I\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}, \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

4. a) Les cas $x=0$ et $x=1$ sont triviaux. Limitons-nous à $x \in]0,1[$. La fonction g_x est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Au voisinage de 0^+, on a :

$$g_x(y) \sim \frac{2}{\pi y^2} \frac{x^3-x}{6} y^3 \sim \frac{x(x^2-1)y}{3}$$

Ceci justifie la continuité de g_x sur $\mathbb{R}^+$.
b) La fonction $y \mapsto g_x(y)\sin(ty)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ est majorée sur $[1,+\infty[$ par $y \mapsto \frac{4}{\pi y^2}$. Elle est donc sommable sur $\mathbb{R}^+$.
c) f_x est impaire, puisque la fonction sinus l'est.
d) Il vient :

$$\begin{aligned} f_x(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi y^2}\left(\sin(xy)\sin(ty) - x\sin(y)\sin(ty)\right)dy \\ &= \frac{2}{\pi}\left(J(x,t) - xJ(1,t)\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(I(\frac{x-t}{2}, \frac{x+t}{2}) - xI(\frac{1-t}{2}, \frac{1+t}{2})\right) \end{aligned}$$

En utilisant les valeurs de $I(a,b)$ trouvées en II. 2 b), il vient :

$$f_x(t) = \begin{cases} \frac{t(1-x)}{2} & \text{si } 0 \le t < x \\ \frac{x(1-t)}{2} & \text{si } x \le t \le 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

5. Si $x \in]0,1[$, f_x est dérivable sur $[0,x[\cup]x,1[\cup]1,+\infty[$ et :

$$f_x'(t) = \begin{cases} \frac{1-x}{2} & \text{si } 0 \le t < x \\ \frac{-x}{2} & \text{si } x < t < 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Les dérivées ne se raccordent pas, donc $B = \mathbb{R}^+ \setminus \{x,1\}$.
Si $x=0$ ou si $x=1$, $f_x(t)=0$, donc $B=\mathbb{R}^+$.

6. a) La fonction $y \mapsto \dfrac{\sin(xy) - x\sin y}{y}\cos(ty)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus :

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(xy) - x\sin y}{y}\cos(ty)\right) = \frac{1}{\pi y}\left(\sin((x+t)y) - \sin((x-t)y) - x[\sin((1+t)y) + \sin((1-t)y)]\right)$$

On reprend les notations de la question I.6.b) et on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy) - x\sin y}{y}\cos(ty)dy = \frac{1}{\pi}\left(A(x+t) + A(x-t) - x(A(1+t) + A(1-t))\right)$$

ce qui donne l'exitence cherchée.

b) c) d) On a, pour $x \in]0,1[$:

$$L(x,t) = \begin{cases} 1-x = 2f'_x(t) & \text{si } t < x \\ -x = 2f'_x(t) & \text{si } x < t < 1 \\ 0 = 2f'_x(t) & \text{si } t > 1 \\ 1/2 - x & \text{si } t = x \neq 1 \\ -x/2 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

On obtient le même type de résultat pour $x = 0$ et $x = 1$.

Corrigé de l'exercice

1. a) On cherche une solution développable en série entière de l'équation $(E1)$. En supposant son rayon de convergence non nul et en dérivant terme à terme, on obtient, pour $p \geq 0$:

$$2p(p+1)a_{p+1} + (p+1)a_{p+1} - a_p = 0$$

b) Donc si $a_0 \neq 0, a_p \neq 0, \forall p \geq 1$ et :

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} = \frac{1}{(p+1)(2p+1)}$$

qui tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini. Le rayon de convergence de la série entière est donc infini.

c) d) On obtient pour tout $p \geq 1, a_p = \dfrac{2^p}{(2p)!}$ et

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2x)^p}{(2p)!} = \begin{cases} \operatorname{ch}(\sqrt{2x}) & \text{si } x \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-2x}) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

2. En posant $y(x) = z(x)f(x)$, l'équation $(E1)$ devient :

$$2xf(x)z"(x) + (4xf'(x) + f(x))z'(x) = 0$$

b) Sur un intervalle I où rien ne s'annule, en séparant les variables, on obtient :

$$z'(x) = \frac{C}{\sqrt{|x|}f^2(x)}$$

- si $I \subset \mathbb{R}^+$, on résoud $z'(x) = \dfrac{C}{\sqrt{x}\,\mathrm{ch}^2(\sqrt{2x})}$, soit :

$$z(x) = C\sqrt{2}\,\mathrm{th}(\sqrt{2x}) + K$$

et

$$y(x) = C\sqrt{2}\,\mathrm{sh}(\sqrt{2x}) + K\,\mathrm{ch}(\sqrt{2x})$$

- si $I \subset \mathbb{R}^-$, on résoud $z'(x) = \dfrac{C}{\sqrt{-x}\cos^2(\sqrt{-2x})}$, soit :

$$z(x) = C\sqrt{2}\tan(\sqrt{-2x}) + K$$

et

$$y(x) = C\sqrt{2}\sin(\sqrt{-2x}) + K\cos(\sqrt{-2x})$$

On s'aperçoit que, dans les deux cas, la fonction y obtenue est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^-$).
Le théorème de Cauchy linéaire nous permet de conclure que l'ensemble des solutions de $(E1)$ sur $\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^-$) est un espace vectoriel de dimension 2 de base $(\mathrm{sh}\sqrt{2x}, \mathrm{ch}\sqrt{2x})$ (resp. $(\sin\sqrt{-2x}, \cos\sqrt{-2x})$.

Et qu'en est-il des solutions sur $\mathbb{R}$?