CCINP MP 2024 Maths 1– Un corrigé

En cas d'erreur, merci de me le signaler à sergelaurent@sergial.org

Exercice 1

Q1 – On a pour $k \geq 1$ l'égalité entre évènements : $(X = k) = (X > k-1) \setminus (X > k)$. Comme en outre on a l'inclusion $(X > k) \subset (X > k-1)$ on en déduit :

$$\boxed{P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)}$$

On en déduit pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k\left(P(X > k-1) - P(X > k)\right) = \sum_{k=1}^{n} kP(X > k-1) - \sum_{k=1}^{n} kP(X > k)$$

Après un décallage d'indice dans la première somme :

$$\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P(X > k) - \sum_{k=1}^{n} kP(X > k)$$

$$= P(X > 0) - nP(X > n) + \sum_{k=1}^{n-1} P(X > k)$$

On obtient finalement : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)}$.

Montrons alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} nP(X > n) = 0$. On a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq nP(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} nP(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$$

Or comme X est d'espérance finie, la série $\sum\limits_{k} kP(X = k)$ converge et son reste tend vers 0 :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k) = 0$. J'en déduis par le lemme des gendarmes que $\lim\limits_{n \to +\infty} nP(X > n) = 0$.

Par suite en passant à la limite dans l'égalité $\sum\limits_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$

j'obtiens : $\boxed{E(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(X > k)}$.

Q2 – Soit pour k entre 1 et p : X_k la variable aléatoire représentant le résultat du k-ième tirage. Ainsi les variables aléatoires $X_1, ..., X_p$ sont mutuellement indépendantes et suivent toutes une loi uniforme sur $\{1, 2, ..., n\}$. On a alors l'égalité entre évènements :

$$\forall k \in \mathbb{N}, (X \leq k) = \bigcap_{i=1}^{p} (X_i \leq k)$$

Il en découle par indépendance et équidistribution que $P(X \leq k) = \left(P(X_1 \leq k)\right)^p$. Finalement :

$$\boxed{P(X \le k) = \begin{cases} \left(\dfrac{k}{n}\right)^p & \text{si } 0 \le k \le n \\ 1 & \text{si } k \ge n+1 \end{cases}}$$

On a ainsi la loi de X avec relation (établie de façon analogue à Q1) $P(X = k) = P(X \le k) - P(X \le k-1)$:

$$\boxed{X(\Omega) = [\![1,n]\!] \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!], P(X = k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p}$$

Q3 – Par somme de Riemann appliquée à la fonction continue $x \mapsto x^p$ sur $[0,1]$, on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p \mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}}$$

Avec la formule de la première question, sachant que X est d'espérance finie car à valeurs dans un ensemble fini :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - P(X \le k)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p\right) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$$

Or on a vu que $\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{p+1} + o(1)$, donc $\displaystyle n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p \underset{n \to +\infty}{=} \frac{np}{p+1} - o(n)$,, d'où l'équivalent : $\boxed{E(X) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{np}{p+1}}$.

Exercice 2

Q4 – (H) est une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2, résoluble en y'' sur *I*. À ce titre son ensemble de solutions $S_H(I)$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Q5 – Soit *f* une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, développable en série entière de rayon infini avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On a alors pour tout réel x : $\displaystyle \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n = 1$. On en déduit : $\displaystyle 2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(n(n-1) + 4n + 2 \right) a_n - a_{n-2} \right) x^n = 1$.

Par unicité du développement en série entière on en déduit alors : $\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2} \; ; \; a_1 = 0 \\ \forall n \ge 2, a_n = \dfrac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$

On en déduit alors clairement que tous les termes de rang impair sont nuls, et on calcule successivement les termes de rang pair : $a_2 = \dfrac{1}{2 \times 3 \times 4}$; $a_4 = \dfrac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}$.

Une récurrence immédiate montre alors que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = \dfrac{1}{(2n+2)!}$ et finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$$

Réciproquement, on vérifie que si pour tout n on a $a_{2n} = \dfrac{1}{(2n+2)!}$ et $a_{2n+1} = 0$, alors la relation $\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2} \; ; \; a_1 = 0 \\ \forall n \geq 2, a_n = \dfrac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$ est bien vérifiée, et par suite f est bien solution de (E) sur son disque ouvert de convergence. Or pour tout x réel la série numérique $\sum_n \dfrac{x^{2n}}{(2n+2)!}$ converge car $\dfrac{x^{2n}}{(2n+2)!} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série entière est de rayon infini. On peut conclure :

$$\boxed{\text{L'équation } (E) \text{ a une seule solution développable en série entière sur } \mathbb{R}. \text{ Celle-ci est } f \text{ définie par } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}. \text{ En outre pour } x \in \mathbb{R}^* \text{ on a } x^2 f(x) = \mathrm{ch}(x) - 1 \text{ et donc } f(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2}.}$$

Q6 – Sachant f et g solutions de (E) sur I, on en déduit que $f - g$ est solution de (H) sur I, tout comme h. Étudions alors la liberté de $(f-g, h)$ en nous donnant deux scalaires α et β tels que $\forall x > 0, \alpha(f-g)(x) + \beta h(x) = 0$. On a ainsi : $\forall x > 0, \alpha\,\mathrm{ch}(x) + \beta\,\mathrm{sh}(x) = 0$. On fait tendre x vers 0 par valeurs supérieures et on obtient $\alpha = 0$. Il reste $\forall x > 0, \beta\,\mathrm{sh}(x) = 0$ et en évaluant en $x = 1$ on obtient $\beta = 0$, d'où la liberté de la famille $(f-g, h)$ de $S_I(H)$ qui est un plan vectoriel. Il s'agit donc d'une base de $S_I(H)$ ce qui permet d'en déduire que la solution générale de (H) sur I est $y(x) = \dfrac{A\,\mathrm{ch}(x) + B\,\mathrm{sh}(x)}{x^2}$. De plus comme g est solution particulière de (E) sur I :

$$\boxed{\text{La solution générale de } (E) \text{ sur } I \text{ est } y(x) = \frac{A\,\mathrm{ch}(x) + B\,\mathrm{sh}(x) - 1}{x^2},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2}$$

En d'autres termes : $S_I(E) = \left\{A(f-g) + Bh + g, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Q7 – On procède par analyse-synthèse en nous donnant tout d'abord une fonction y solution de (H) sur $\mathbb{R}$. y est alors *a fortiori* solution de (H) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. On vérifie sans difficulté que la solution de (H) sur $]-\infty, 0[$ est du même type et on a ainsi l'existence de quatre constantes A, B, C et D telles que :

$$\begin{cases} \forall x > 0, y(x) = \dfrac{A\,\mathrm{ch}(x) + B\,\mathrm{sh}(x)}{x^2} \\ \forall x < 0, y(x) = \dfrac{C\,\mathrm{ch}(x) + D\,\mathrm{sh}(x)}{x^2} \end{cases}$$

Or y est continue (car dérivable) en 0. Or si $A \neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} |y(x)| = +\infty$: contradiction. Donc $A = 0$ et de même $C = 0$. On a alors les équivalents : $y(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{B}{x}$ et $y(x) \underset{x\to 0^-}{\sim} \dfrac{D}{x}$ ce qui oblige pour les mêmes raisons $B = D = 0$. Il reste $\forall x \in \mathbb{R}^*, y(x) = 0$ et par continuité $y(0) = 0$.

Réciproquement, la fonction nulle est bien solution de (H) sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

$\boxed{\text{La seule solution de } (H) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est la fonction nulle}}$.

Problème question préliminaire

Q8 – La série à termes positifs $\sum\limits_n \dfrac{1}{n^2}$ étant convergente, la famille $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc sommable.

Par sommation par paquets à partir de l'union disjointe $\mathbb{N}^* = \{2n, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2n+1, n \in \mathbb{N}\}$ on a alors : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Donc en admettant $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ on a $\displaystyle\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et finalement $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

Problème partie I

Q9 – La fonction proposée est clairement dérivable, de dérivée $x \mapsto (n+1)\cos(x)\sin^n(x)$.

De là pour $n \in \mathbb{N}$: $W_{n+2} = \left[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^n(x)\,\mathrm{d}x$. Ainsi $W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$ et finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n}$.

On montre alors par récurrence sur n la formule de l'énoncé :

- Pour $n = 0$, on a $W_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 1$ et $\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = 1$: la propriété est vraie.
- On suppose la propriété vraie au rang n. Avec la formule de récurrence ci-dessus, on obtient : $W_{2n+3} = \dfrac{2n+2}{2n+3} \times \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \dfrac{2^{2n+1}(n+1)!n!}{(2n+3)!}(2n+2) = \dfrac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}$, ce qui montre que la propriété est vraie au rang $n+1$.

On a bien montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}}$.

Q10 – D'après le cours avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, on connait le développement valide pour $\left|-x^2\right| < 1$, c'est-à-dire pour $|x| < 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2^n n!} x^{2n}$$

Or $1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1) = \dfrac{(2n)!}{2\times4\times\cdots\times(2n)} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \left]-1,1\right[, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}}$$

En primitivant et sachant $\arcsin(0) = 0$ on a :

$$\boxed{\forall x \in \left]-1,1\right[, \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n+1)(n!)^2} x^{2n+1}}$$

Q11 – On sait que pour $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ on a $\arcsin(\sin(x)) = x$ et en outre pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ on a $|\sin(x)| < 1$. Avec l'égalité ci-dessus on obtient donc :

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n+1)(n!)^2} \sin^{2n+1}(x)}$$

Q12 – On pose pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $f_n(x) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(2n+1)(n!)^2} \sin^{2n+1}(x)$.

- Les f_n sont toutes continues par morceaux et intégrables sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ car continues sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
- On vient de voir que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ vers la fonction $x \mapsto x$.
- Avec Q9 : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |f_n| = \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n+1)(n!)^2} W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n+1)(n!)^2} \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n+1)^2}$, et la série $\displaystyle\sum_n \int_0^{\pi/2} |f_n|$ est donc convergente.

Il résulte de tous ces points que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Avec la question préliminaire, on en déduit : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

Problème partie II

Q14 – Pour $|x|<1$ on a $|x^2|<1$ ce qui permet d'écrire : $\boxed{\forall x \in]-1,1[, \frac{1}{x^2-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}}$.

Ceci nous amène à poser pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1]$: $f_n(x) = -x^{2n}\ln(x)$.

- Les f_n sont définies et continues sur $]0,1]$ avec en outre $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

  Comme $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ converge, on en déduit l'intégrabilité des f_n sur $]0,1]$ et donc sur $]0,1[$.

- La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur $]0,1[$ vers $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2-1}$.

- Par intégration par parties : $\int_0^1 |f_n| = \int_0^1 f_n = \left[-\frac{x^{2n+1}\ln(x)}{2n+1}\right]_0^1 + \frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x$. Comme $2n+1>0$ on a $\lim_{x\to 0^+} x^{2n+1}\ln(x) = 0$, ce qui valide l'intégration par parties et nous donne $\int_0^1 |f_n| = \frac{1}{(2n+1)^2}$; ainsi la série numérique $\sum_n \int_0^1 |f_n|$ converge.

On déduit de tous ces points : $\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}}$.

Q15 – Soit $\varphi : \begin{cases} [0,+\infty[^2 \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} \end{cases}$

- Pour tout $t \geq 0$, la fonction $\varphi(\cdot, t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $x \geq 0$, la fonction $\varphi(x, \cdot)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- On a la domination, pour $x,t \geq 0$: $|\varphi(x,t)| \leq \frac{\pi}{2(1+t^2)}$, majoration indépendante de x. En outre la fonction $t \mapsto \frac{\pi}{2(1+t^2)}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$ et de plus $\frac{\pi}{2(1+t^2)} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ce qui en établit l'intégrabilité sur $[0,+\infty[$.

Il résulte de ces trois points : $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie et continue sur } [0,+\infty[}$.

Q16 – On a de plus :

- Pour tout $t \geq 0$, la fonction $\varphi(\cdot, t)$ est de classe C^1 sur $]0,1]$ avec pour $t \geq 0$ et $0 < x \leq 1$: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$.
- Pour tout $x \in]0,1]$, la fonction $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

● Soit $a \in]0,1]$, $x \in [a,1]$ et $t \geq 0$. On a la domination $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t}{\left(1+t^2\right)\left(1+a^2t^2\right)}$; la fonction $t \mapsto \frac{t}{\left(1+t^2\right)\left(1+a^2t^2\right)}$ est indépendante de *x*, continue sur $[0,+\infty[$ et vérifie $\frac{t}{\left(1+t^2\right)\left(1+a^2t^2\right)} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$, ce qui en assure l'intégrabilité sur $[0,+\infty[$.

Il résulte de ces points et de la question Q15 que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0,1] \text{ et } \forall x \in]0,1], f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)\left(1+x^2t^2\right)}}$$

Q17 – On a : $\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+x^2t^2} = \frac{\left(1-x^2\right)t}{\left(1+t^2\right)\left(1+x^2t^2\right)}$, donc pour $x \in]0,1[$ on a avec la question précédente : $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^2x^2}\right)\right]_{t=0}^{+\infty}$ et finalement :

$$\boxed{\forall x \in]0,1[, f'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}}$$

Q18 – On a par calcul direct : $f(1) = \frac{1}{2}\left[\arctan^2(t)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$.

Par ailleurs, *f* étant C^1 sur $]0,1]$ on a pour tout $x \in]0,1]$: $\int_x^1 f' = f(1) - f(x)$. J'en déduis par continuité de *f* en 0 (cf Q15) que l'intégrale $\int_0^1 f'$ converge et $\int_0^1 f' = f(1) - f(0) = \frac{\pi^2}{8}$. Or avec Q17 et Q14 : $\int_0^1 f' = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, d'où $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. La question préliminaire nous redonne alors $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

FIN